Preprints of the
Max Planck Institute for
Research on Collective Goods
Bonn 2007/11a

Aggregate und Repräsentationen ihrer Teile

Axel Ostmann

MAX PLANCK SOCIETY

Preprints of the
Max Planck Institute
for Research on Collective Goods Bonn 2007/11a

Aggregate und Repräsentationen ihrer Teile

Axel Ostmann

Juni 2006

Max Planck Institute for Research on Collective Goods, Kurt-Schumacher-Str. 10, D-53113 Bonn
http://www.coll.mpg.de

Aggregate und Repräsentationen ihrer Teile

Axel Ostmann*

Juni 2006

*AfOK, Saarbrücken, Germany, e-mail: a.ostmann@mx.uni-saarland.de

INHALTSVERZEICHNIS

1 EINLEITUNG

Das Hauptanliegen dieses Beitrags ist die von Condorcet vorgelegten Zugänge zu Aggregations- und Repräsentationsproblematik zu nutzen, um den aktuellen Forschungsstand einordnen zu können. Die moderne Sicht in diesem Bereich wird durch die Sozialwahltheorie (social choice theory) geprägt. Die hier als angemessener bevorzugte Sicht ist eine der kooperativen Spieltheorie.

Nach einleitenden Bemerkungen zu Condorcets Ausgangsgesichtspunkten entwickeln wir einen aus Sicht der mathematischen Logik bestimmten Zugang (Abschnitt 3). Wir ergänzen dabei die Darstellung um einige bisher fehlende Ergebnisse über Pattsituationen. Nach einer Verknüpfung des Zugangs der Logik mit dem der Sozialwahltheorie (Abschnitt 4), diskutieren wir die von Condorcet eingeführten probabilistischen Modelle (Abschnitt 5). In Abschnitt 6 werden weitere Struktureinsichten vorgestellt, die aufgrund spieltheoretischer Analyse gewonnen werden können. Danach können in Abschnitt 7 die Frage der Repräsentation einer genaueren, auch spieltheoretischen Betrachtung unterzogen werden. Hierbei spielt besonders das Werkzeug der Minimalrepräsentation eine wichtige Rolle. Exemplifiziert wird dieses an Daten aus der Bundestagswahl 2005.

2 EIN MATHEMATIKER BEGRÜNDET EIN GESELLSCHAFTLICHES KALKÜL

Irrwege - ich versuche nachzuvollziehen, wohin die Suche führte, die Antoine Condorcet begonnen hatte.

Marie Jean Antoine Nicolas Caritat Marquis de Condorcet wurde 1743 geboren. Gegen den Widerstand seiner Familie wurde er anerkannter Mathematiker, dazu ein scharfzüngiger Publizist und nahm teil an den beiden wegweisenden Unternehmen seiner Zeit: Enzyklopädie und Revolution. Er wurde 1769 Mitglied der Académie des Sciences. Er entwirft das Projekt der "instruction publique", fertigt einen Verfassungsentwurf an und eine Erklärung der Menschenrechte. Aufgrund seines kompromißlosen Eintretens für die Menschenrechte macht er sich sowohl bei den "aufgeklärten" Monarchen wie auch bei den Machern der Revolution unbeliebt. Er wird gefangengenommen, drei Monate zu früh, um den Blutrausch der Revolution zu überleben: er stirbt am 30. März 1794 im Gefängnis von Bourg-la-Reine (Wahlster 1979).

"Als Mathematiker", wenn man das aus heutiger Sicht so trennen will, war Condorcet "Geometer", so bezeichnete er sich gerne selbst, Analytiker und Wahrscheinlichkeitstheoretiker, so hätte man das damals noch nicht bezeichnet - die Charakterisierung Condorcets bei dem Mathematikhistoriker Todhunter (Todhunter 1865) rechtfertigt aber diese Bezeichnungen (vgl. Granger 1956, Rashed 1974).

Die Aufklärung hatte in ihrem Befreiungsschlag gegen die kirchliche und weltliche Bevormundung unter Beweis gestellt, wie durch vernünftige Neugier, individuelle Kritik und "libre examen" die Welt erklärbar und gestaltbar wird. Dabei spielte die Mathematik bereits eine wesentliche Rolle. Insbesondere sein Freund Turgot wirbt bei Condorcet für die Hinwendung zu gesellschaftlich relevanten Themen.

Schließlich entsteht bei Condorcet das Projekt der "mathématique sociale" (Tableau général, Œuvres, tome 1). Wenn man so will, ist das nichts weniger als der Versuch der fundierten Integration der individuellen Einsichten und Bedürfnisse zu einem ”interêt général”, die eine Entwicklung mit dem Ziel der ”bonheur public” unter Wahrung der ”natürlichen” Rechte der Individuen stützen kann.

Für unser Thema ”Aggregation und Repräsentation ” müssen wir uns freilich auf einen recht kleinen Ausschnitt dieses Programms beschränken.

In diesem Ausschnitt geht es vor allem um seine Beschäftigung mit Abstimmungsverfahren und Wahlen. Die Forderung allein nach einer freien, gleichen Wahl war damals schon revolutionär. Die ”Tiers” fordern ”vôte par tête” statt ”vôte par ordre”.

Condorcet engagierte sich, unter anderem in einem langen Essai (1788), für die Wiedereinrichtung der Provinzversammlungen und anderen dezentralisierten Gremien, damit die Möglichkeit direkter Teilnahme geschaffen wird.

> Il suffira de répondre que tout homme a le droit de discuter publiquement des intérêts communs à tous les hommes. (Essai ..., Œuvres, tome 8, p.119)

Erst der sollte der Diskussions- und Demokratisierungsprozeß stattfinden und erst dann die verantwortliche Wahl von Repräsentanten.

> Il fallait donc affirmer les fondements de l'édifice avant de penser à en poser le comble. Avant de songer de donner des chefs aux citoyens, il fallait qu'il y eût des citoyens, il fallait qu'il y eût des citoyens en état de les choisir. (Vie de M. Turgot, Œuvres, tome 5, p.142)

Nur solche Repräsentanten verfolgen das Interesse der Gesamtheit und nicht ihr eigenes oder das einer Gruppe hinter ihnen: Repräsentanten, nicht Räuber.

Condorcet kritisiert die Amerikanische Verfassung. Er wendet sich dabei gegen die naturrechtliche Konstruktion Lockes (Staat nur als Garant von Eigentum und Sicherheit) und fordert die Zugrundelegung der ”Wahrheit” der Menschenrechte bei Gesetzen und Verwaltung (Alexandre Koyre (1948). Condorcet. Revue de Métaphysique et de Morale 53, 166-189). ”Sonst bleiben die Sklaven Sklaven”.

Für Condorcet bedeutet die Erklärung der Menschenrechte die notwendige Grundlage jeder Politik, die das Glück aller zum Ziel hat. Damit werden auch Anforderungen an die Individuen gestellt; es geht um die rationale Vermittlung der subjektiven Wünsche. Da der Mensch von Natur aus zur Solidarität (Kooperation) neigt, liegen die Hürden in den ungleichen Bedingungen. Er fordert daher die Aufhebung der Sklaverei und des Krieges, die Gleichheit der Geschlechter, und Besitz und Bildung für alle. (Sur l'instruction publique, Œuvres, tome 7):

> Les révolutions amenées par le perfectionnement général de l'espèce humaine doivent sans doute la conduire à la raison et au bonheur. (p. 186)

Um zum Interessensausgleich zu kommen, sind die ”Bedingungen” entsprechend zu gestalten. Darunter zählen des weiteren die Verfassung und die Wahlmodi. Der Vernunft des Einzelnen soll aufgeholfen werden, und das geht, denn la perfectibilité ist ein Wesenszug des Menschen.

Um die Bedingungen zu gestalten und den Interessensausgleich zu organisieren, braucht es den vernünftigen Diskurs. Der ist weitgehend ”technisch”. Condorcet denkt hier an eine ”langage universelle” mit "combinaisons" und "operations", also, wenn man so will, an Logik. Damit steht er nicht allein - Leibniz, später Frege weisen denselben Weg (Esquisse, p.279-281).

> ... elle servirait à porter sur tous les objets qu'embrassent l'intélligence humaine, une rigueur, une précision qui rendraient la connaisance de la vérité facile et l'erreur presqu'impossible. (p.281)

Wenn die Bedingungen günstig sind, ist das weitere nur (logisches) Kalkül.

3 Das logische Kalkül

3.1 Regeln und einfache Spiele

Wenn eine Gruppe N von Individuen i eine **gemeinsame Entscheidung** trifft, so endet diese im einfachsten Falle in einer Frage, wer einer bestimmten Aussage a zustimmt. Mit [a] seien die **Fürsprecher**, mit [non a] die Gegner dieser Aussage bezeichnet. Allgemein sprechen wir bei Teilmengen von N von Koalitionen, insbesondere von der großen Koalition, falls von allen, also von N insgesamt die Rede ist. Kommt es nun schließlich zu einer förmlichen Abstimmung, so ist für eine solche fast immer zuvor schon durch eine Abstimmungsregel festgelegt, welche Koalitionen als hinreichend erachtet werden, um einen gemeinsamen Entschluß bewirken zu können.

Üblicherweise ist der **Geltungsbereich der Regel** dadurch festgelegt, daß sie nur für bestimmte Typen von Aussagen vorgesehen ist. Liegt der Aussagenraum fest, so können wir die Abstimmungsregel als ein spezielles kooperatives Spiel[1], einfaches Spiel genannt auffassen, das jeder Koalition den Wert 1 oder 0 zuweist, je nachdem ob sie eine Aussage verabschieden kann oder nicht.

Etwas formaler: Die Anzahl der Elemente einer Menge M sei mit #M bezeichnet. Ein **einfaches Spiel** ist ein Paar (N,v), wobei N eine Menge der Größe n=#N, genannt Spielermenge, ist und v eine boolesche Funktion

$$v : 2^N \to \{0,1\} : S \mapsto v(S).$$

Koalitionen S explizit als binären Vektor der Länge n zu schreiben, kann für Berechnungen äußerst praktisch sein. So unterscheiden wir im folgenden möglichst nicht zwischen Vektor und Menge, also z.B. für n=6 nicht zwischen (0,1,0,1,1,0) oder einfach 010110 und $\{2,4,5\}$ oder 245.

Interpretiert wird die Funktion v so, daß der Wert 1 ausdrückt, daß die Koalition S als Fürsprecherkoalition einer Aussage (des betrachteten Aussagenraumes) die Macht hat, diese Aussage als gemeinsamen Entschluß durchzusetzen. Im folgenden beschränken wir uns auf endliche Mengen N.

Aus dem Alltag sind einige dieser Regeln bekannt:

[1] Oft werden kooperative Spiele auch als Koalitionsspiele bezeichnet, manchmal auch als Spiele in Characteristischer-Funktions-Form, was jedoch irreführend ist, da es keinen wohldefinierten Begriff eines Spieles gibt, der es erlaubt, dieses in den üblichen unterschiedlichen Formenßu repräsentieren.

1. Die **Einstimmigkeitsregel**
v(S)=1 genau wenn S=N.

2. Die Mehrheitsregel und **das absolute Mehr**
v(S)=1 genau wenn $\#S > n/2$ bzw. $\#[a] > \#[non\, a]$;
oder: in einem Gremium Entsprechendes für die Anzahl der Stimmen oder Anteile.

3. Eine **qualifizierte Mehrheitsregel**
2/3- oder 3/4-Mehrheiten etc.

4. Eine qualifizierte Mehrheitsregel mit **Schutzklausel**
z.B. Mehrheit, aber nicht gegen alle Südprovinzen.

5. Ein **Minderheitenrecht** bzw. eine Ermächtigung
z.B. ein Untersuchungsausschuß wird eingerichtet, sobald mehr als ein Viertel der Abgeordneten dies wünschen;
oder: jeder kann eine ausgabenwirksame Entscheidung bis zum Betrag von 2000 EUR alleine treffen

6. Eine **Mehrfachqualifikation**
Gegenzeichnungen,
oder: sowohl Mehrheit der Staaten als auch Mehrheit der Abgeordneten;
oder: sowohl die Mehrheit nach Stimmen als auch die Mehrheit nach Beitragsleistung.

Manche dieser Regeln können mittels n+1 natürlicher Zahlen angegeben werden. Zum Beispiel die Einstimmigkeitsregel mit $(n; 1, 1, ..., 1)$. Verallgemeinert man die Stimmgewichte für die Individuen i auf m_i und das zu erreichende Mehr auf λ, so sind mit diesen Daten $(\lambda; m_1, ..., m_i, ..., m_n)$ die sogenannten **gewichteten Majoritätsspiele** generierbar:

$$v(S) = 1 \text{ genau wenn } m(S) \geq \lambda \text{ , wobei } m(S) = \sum_{i \in S} m_i$$

3.2 Erwünschte Aggregationskriterien

Wir diskutieren jetzt ein paar Eigenschaften, die gegebenenfalls für die Abstimmungsregel erwünscht sind.

(1) v(N)=1. Falls ein Vorschlag einstimmige Zustimmung findet, so gilt er als angenommen.

(2) v($\emptyset$)=0. Falls niemand einem Vorschlag zustimmt, so gilt er als abgelehnt.

(3) Monotonie: ein Vorschlag a, dessen Fürsprecher [a] bereits eine Gewinnkoalition darstellen, soll nicht durch etwaige weitere Zustimmungen, die Gültigkeit verlieren. Falls also S eine Teilmenge von T ist und v(S)=1, so soll v(T)=1 gelten.

Gilt v(S)=1 und es gibt keine kleinere Koalition T, die ebenfalls Gewinnkoalition ist, so heißt die Koalition S **minimale Gewinnkoalition**. Die Monotonie hat die Konsequenz, daß man Funktionen v bereits durch die Angabe der minimalen Gewinnkoalitionen vollständig charakterisieren kann. Wir bezeichnen die Menge aller minimalen Gewinnkoalitionen bei Bedarf mit M=M(v)=M(N,v). Setzen wir Monotonie voraus, so kann natürlich (1) ersetzt werden durch die Annahme, daß es überhaupt eine Gewinnkoalition gibt. Die gewichteten Majoritätsspiele sind monoton.

(4) Symmetrie (Anonymität)

Unter Umständen ist es erwünscht, die einzelnen Urteile so zu aggregieren, daß sie mit gleichem Gewicht in das Gesamturteil eingehen. Diese Gleichbehandlung kann unterschiedlich formalisiert werden. Die dabei strengstmögliche Forderung ist, daß jede Permutation[2] π der Spielermenge die Koalitionswerte erhält, also für alle Koalitionen S die Gleichung $v(S) = v(\pi(S))$ gilt. Weiter unten werden wir auch abgeschwächte Versionen betrachten.

(5) Superadditivität (Widerspruchsfreiheit)

Enthält der Aussagenraum auch eine Alternative, in dem Sinne, daß a und b einander widersprechen, so werden [a] und [b] disjunkte Mengen sein. Wir schreiben $A + B$ für $A \cup B$ falls A und B disjunkte Mengen sind ($A \cap B = \emptyset$). Eine wichtige Forderung für solche Aussagenräume ist, daß auch im Aggregat nicht gleichzeitig für a und b entschieden werden darf. Formal läßt sich das so fassen: es darf keine zwei disjunkten Gewinnkoalitionen geben.
Ein Spiel heißt **superadditiv**[3] genau wenn $v(S+T) \leq v(S) + v(T)$ gilt. Da v(S+T) höchstens den Wert 1 annimmt, kann höchstens eine der disjunkten Koalitionen Gewinnkoalition sein. Aus Superadditivität folgt Monotonie. Die oben unter 5. genannten Regeln sind nicht superadditiv, sind aber monoton.

(6) Konstantsumme ("tertium non datur")

Enthält der Aussagenraum zu einer Aussage a auch ihr Gegenteil non a, so will man gerne, daß eine Entscheidung für eine der beiden zustande kommt, also entweder a oder non a als Gesamturteil verabschiedet wird. Damit verlangt man, daß für alle S die Summe aus v(S) und v(N-S) konstant gleich eins ist. Es ist gut bekannt, daß für gerade Anzahlen n=2k das absolute Mehr, also etwa das aus (k+1; 1,...,1) generierte

[2]Eine Permutation einer (endlichen Menge N) ist eine umkehrbare Abbildung $\pi : N \to N : i \mapsto \pi(i)$. Da für alle $i \neq \pi(i)$ gilt, daß nach wiederholter Ausführung für irgendein $k = k(i) \in N$ gilt, daß π^k wieder zu i zurückkehrt, kann man π auch sparsam durch die Angabe dieser Zyklen darstellen. So ist für #N=5 etwa (34) eine Vertauschung der Elemente 3 und 4, wobei alle anderen fest bleiben. Die Abbildung (13)(254) vertauscht 1 und 3 und bildet 2 in 5, 5 in 4 und 4 in 2 ab. Es gibt genau so viele Permutationen einer Menge N wie es Ordnungen auf dieser Menge gibt, also #N!
Identifizieren wir die Ordnung $1 > 2 > 3 > 4 > 5$ mit der Identität, also der Abbildung, die alle Elemente fest läßt, so kann etwa (13)(254) mit der Ordnung $3 > 5 > 1 > 2 > 4$ identifiziert werden und andere Permutationen entsprechend.
Jede Permutation von N bildet auch Teilmengen $S \subset N$ in Teilmengen ab, wobei $\pi(S) = \{\pi(i); i \in S\}$. Durch die Definition $(\pi(v)(S) = v(\pi(S)$ bildet sie auch Spiele (N,v) in Spiele (N,$\pi(v)$) ab. Die Permutation π ist eine Symmetrie des Spieles (N,v) falls $v = \pi(v)$ gilt.
Mathematisch gesehen: Die Symmetrien eines Spieles bilden eine Untergruppe der Permutationen, die sogenannte Automorphismengruppe des Spieles.

[3]Ein superadditives einfaches Spiel wird bei Shapley und anderen auch als "strong game" bezeichnet.

Spiel, kein Konstantsummenspiel ist. Denn eine Koalition der Größe k hat als Komplement eine Koalition gleicher Größe, die ebenfalls keine Gewinnkoalition ist. Mit anderen Worten: Konstantsummenspiele lassen keine Pattsituationen zu.

3.3 Möglichkeiten, ein Patt zu vermeiden

Es ist die Frage zu stellen, ob dieser Mangel, der gerne als die Möglichkeit einer Pattsituation beschrieben wird, behoben werden kann, ohne auf die sonstigen "Güteeigenschaften" zu verzichten.

Diese Frage ist bisher meines Wissens noch unbeantwortet geblieben.

Wir geben dazu nun ein Beispiel für n=2k=6. Um aus der absoluten Mehrheitsregel ein Konstantsummenspiel zu machen, muß in geeigneter Weise die Hälfte der Koalitionen der Größe k=3 den Gewinnkoalitionen hinzugefügt weden. Die folgenden 10 Koalitionen erfüllen die Bedingungen.

110001
011001
001101
000111
100011

110100
011010
101100
010110
101010

Summiert man die Einträge in dieser zehn-zeiligen Matrix spaltenweise, so ergibt sich jeweils die Summe r=5. Man kann die Eigenschaft, daß für jede Koalitionsgröße jeder Spieler in gleich viel Gewinnkoalitionen Mitglied ist, als ausreichende Symmetrieeigenschaft (vgl. Eigenschaft 3) ansehen. Eine Permutation von N, die spielerhaltend ist, in dem Sinne, daß jede Gewinnkoalition in eine Gewinnkoalition überführt, heißt Automorphismus oder **Symmetrie** (des Spieles). Die Symmetrien bilden eine Untergruppe der Permutationen. Ein etwas stärkere Symmetriebedingung als die wie oben durch einfaches Abzählen gegebene ist die folgende:

Jeder Spieler kann in jeden anderen durch eine Symmetrie überführt werden.

Die Bedeutung dieser Eigenschaft (man spricht von einer auf N transitiv wirkenden Gruppe) liegt darin, daß jeder Spieler in dieser Struktur, die gleiche Rolle spielt bzw. übernehmen kann.

Für unsere für n=6 angegebene Struktur sind die Permutationen (12345) und (162)(453) Automorphismen, die durch Hintereinanderausführung eine transitiv wirkende Gruppe erzeugen[4]. Die Inzidenzstruk-

[4]Die angegeben Struktur hat sogar eine zweifach transitive Automorphismengruppe - das bedeutet, daß alle Paare gleichbehandelt werden (nicht nur die Individuen); die Konstruktion wird in Ostmann 1993, p. 261 angegeben, ist jedoch nur verallge-

tur mit N als Punktemenge und den oben angegebenen 10 Koalitionen ist als sogenanntes Steinersystem $S_2(2,3;6)$ bekannt (vgl. Beth/Jungnickel/Lenz 1985, p. 44, p. 614). Die Mengen der Größe k bilden ein sogenanntes vollständiges Blockdesign bzw. triviales Steinersystem $S_\lambda(2,k;2k)$ (vgl. p.24) mit $\lambda = \binom{2k-2}{k-2}$. Für n=6 werden also die 4 für jeweils 2 Spieler gemeinsamen Koalitionen der Größe k auf die Hälfte, nämlich 2 gemeinsame, reduziert.

Daß Symmetrie und Konstantsumme für gerade n nicht immer vereinbar sind, zeigen die Beispiele n=2 und n=4. Im Falle n=2 wäre zur Herstellung der Konstantsumme genau eine der beiden Einpersonenkoalitionen als zusätzliche Gewinnkoalition auszuwählen, was mit der Symmetrie jedoch unvereinbar ist. Im Falle n=4 wären drei der $\binom{4}{2}$ = 6 Paarkoalitionen auszuwählen. Da jedoch diese drei insgesamt 3k=6 Inzidenzen aufweisen, können diese nicht gleichmäßig auf vier Spieler verteilt werden. Wäre ein Spieler nämlich in r dieser Koalitionen Mitglied, so müßte aus Symmetriegründen jeder in r Koalitionen Mitglied sein, was insgesamt 4r Mitgliedschaften oder Inzidenzen ergibt. Da aber 6 nicht durch 4 teilbar ist, muß jede Auswahl von drei Koalitionen die Symmetriebedingung verletzen. Das letzte Argument gilt allgemein.

Satz 3.1. *Sei #N=n=2k. Ist $\binom{2k-1}{k-1}$ ungerade, so gibt es kein symmetrisches Konstantsummenspiel (N,v).*

Beweis. Die Anzahl aller Koalitionen der Größe k ist $\binom{2k}{k} = 2\binom{2k-1}{k-1}$. Auszuwählen sind also $\binom{2k-1}{k-1}$ Koalitionen der Größe k. Da jede dieser Koalitionen k Inzidenzen, also Mitgliedschaften, trägt, die sich aufgrund der Symmetrie so auf die 2k Spieler verteilen sollen, daß jeder Spieler über gleich viele Mitgliedschaften verfügt, muß dazu $\binom{2k-1}{k-1}$ geradzahlig sein. □

Tabelle: die ersten Auswahlzahlen

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
$\binom{2k-1}{k-1}$	1	3	10	35	126	462	1716	6435	24.310	92.378	352.716

Da für n=2, 4, 8, 16, 32, ... kein symmetrisches Konstantsummenspiel existiert, liegt es nahe zu vermuten, daß genau für die Zweierpotenzen keine symmetrischen Konstantsummenspiele existieren. Durch folgenden Satz wird diese Vermutung gestützt:

Satz 3.2. *Sei #N=n=2k. Genau dann ist $\binom{2k-1}{k-1}$ ungerade, wenn n eine Zweierpotenz ist, also $\#N = n = 2^{s+1}$.*

Beweis. 1. Es sei zunächst $n = 2^{s+1}$.

Wir zeigen $\binom{2^{s+1}-1}{2^s-1}$ ist ungerade. Aus dem vorherigen Satz folgt dann, daß kein symmetrisches Konstantsummenspiel existiert. Es gilt:

meinerbar, wenn 2k-1 eine Primzahlpotenz ist; für andere Größen von N müssen wir uns mit einfacher Transitivität zufrieden geben. Erzeugen wir für den Fall n=6 beispielsweise aus die Gewinnkoalitionen aus 111000 und den Permutationen (12345) und (162)(345), so ergibt sich eine kleinere Automorphismengruppe, die nur noch einfach transitiv ist.

$\binom{2^{s+1}-1}{2^s-1}$ $=\prod\{\frac{2^s+i}{i}; i = 1, ..., 2^s - 1\}$

Zerlegen wir dieses Produkt in ein Produkt mit den Faktoren mit ungeraden i und eines mit geraden i. Wir betrachten nun jeweils den Faktor

$\frac{2^s+i}{i}$

Für ungerades i sind Zähler und Nenner ungerade. Für gerades i läßt sich der Bruch mit i kürzen; wir erhalten:

$\frac{2^r+j}{j}$ mit $r < s$ und j ungerade

Nach entsprechendem Kürzen enthält also das obige Produkt nur ungerade Faktoren, es ist also selbst ungerade.

2. Sei nun n keine Zweierpotenz. Dann gibt es eine Zahl s, für die $2^s < n < 2^{s+1}$ gilt. Wir zeigen zunächst, daß für alle Zahlen $r < s$ folgendes gilt:
in der Menge T={k+1,k+2,...,2k-1} gibt es mindestens soviele durch 2^r teilbare Zahlen wie in S={1,2,...,k-1}. Enthält S die 1- bis i-fachen von 2^r, so enthält T die (i+1)- bis 2i-fachen oder, falls k auch durch 2^rteilbar ist, die (i+2)- bis (2i+1)-fachen. Denn: $2^r i < k$ und $2^r(2i) < 2k = n$.

Anmerkung: eventuell gibt es eine weitere durch 2^r teilbare Zahl in T. Sei $k = 2^r i + j$. Wenn $2j < 2^r$ gilt, dann folgt $2k = 2^{r+1}i + 2j < 2^r(2i + 1)$. Letzteres bedeutet, daß in T keine weitere durch 2^r teilbare Zahl Platz hat. Allgemein gilt jedoch nur $j < 2^r$. Dann gilt immerhin, daß höchstens eine weitere durch 2^r teilbare Zahl in T Platz hat.

Kehren wir nun zurück zur Zahl

$\binom{2k-1}{k-1}$ $=\prod\{\frac{k+i}{i}; i = 1, ..., k - 1\}$

Im Zähler stehen die Zahlen aus T, im Nenner die Zahlen aus S. Da der Zähler für jede Zweierpotenz höchstens mehr Vielfache enthält als der Nenner, können wir so kürzen, daß im Nenner eine ungerade Zahl entsteht.

Bleibt noch zu zeigen, daß im Zähler auch nach dem Kürzen eine gerade Zahl steht. Dazu betrachten wir den Faktor mit der maximal auftretende Zweierpotenz, die ja nur im Zähler vorkommt, also der Faktor

$\frac{2^s}{2^s-k}$

Dieser Faktor enthält nach dem Kürzen eine gerade Zahl im Zähler. Daraus folgt, daß $\binom{2k-1}{k-1}$ eine gerade Zahl ist. □

Übrigens: Die Geltung von Monotonie und 2^{n-1} Gewinnkoalitionen (”half-half games”) garantieren nicht Konstantsumme; Shapleys Spiel (p) (Shapley 1962) - wir kommen in Abschnitt 5.2 darauf zurück - ist dafür das einfachste (allerdings unsymmetrische) Beispiel; weitere, kompliziertere Beispiele findet man in Ostmann 1993.

3.4 FOLGERUNGSTREUE

Aussagen können außer der Unvereinbarkeit weitere logische Abhängigkeiten aufweisen. Gelten etwa die Aussagen ”wenn a so b” und ”a”, dann gilt auch ”b”; damit gilt dann auch ”a und b”. Für das folgende sei präzisiert, was unter logischer Aggregation zu verstehen ist:

Wir setzen hier eine zweiwertige Logik voraus: Aussagen werden mit den ”Wahrheitswerten” 1 und 0 belegt, die meist als ”wahr” bzw. ”falsch” interpretiert werden. Jedes Individuum i unserer Gruppe N verfügt über eine solche Bewertung. Unsere Aggregationregel (N,v) aggregiert diese Urteile in ein aggregiertes Urteil. Eine Aussage gilt im Aggregat genau dann als ”wahr”, wenn die Fürsprecherkoalition eine Gewinnkoalition ist. Damit wird jeder mit individuellen Urteilen belegte Aussage ein ”kollektiver Wahrheitswert” zugewiesen.

Ohne formal einen Aussagenraum (eine ”Sprache”) zu definieren, gehen wir im folgenden davon aus, daß Aussagen durch die logischen Operationen ”non”, ”und”, ”oder”, ”entweder - oder”, ”wenn - so”, ”genau dann wenn”, ”weder - noch”, ”während” zu neuen Aussagen verbunden werden können. Aus der Logik ist bekannt, daß aus den Operationen ”non” und ”wenn - so”, also aus Verneinung und Folgerung, alle anderen Operationen konstruiert werden können. So ist ”a und b” etwa gleichwertig mit ”non (wenn a, so (non b)”. Enthält der Aussagenraum mindestens zwei frei mit (individuellen) Urteilen belegbare Aussagen, und gehört jede mittels der Operationen ”non” und ”wenn - so” erzeugte Aussage auch zum Aussagenraum, so sind alle logischen Operationen innerhalb des Aussagenraumes ausführbar und jede mögliche Belegung erzeugbar.

Als **folgerungstreu** bezeichnen wir eine Aggregationsregel, die die Wahrheitstabelle von ”wenn - so” in eine entsprechende Tabelle übersetzt. In dieser Tabelle ist [wenn a, so b] genau dann eine Gewinnkoalition, wenn [(non a) und b] oder [a und (non b)] oder [a und b] Gewinnkoalition ist. Die Regel der absoluten Mehrheit ist nicht folgerungstreu. Um dies einzusehen, betrachte man eine minimale Gewinnkoalition S und ein Element $i \in S$. Dann sind die drei disjunkten Koalitionen $S - \{i\}$, $\{i\}$ und $N - S$ keine Gewinnkoalitionen. Jede Vereinigung von zweien dieser drei Mengen ist Gewinnkoalitionen. Wir betrachten die drei Aussagen a, b, c, sowie die Aussage ”wenn (a und b), so c”.

Koalition	a	b	c	non c	a und b	wenn a und b, so c
$S - \{i\}$	1	0	0	1	0	1
$\{i\}$	0	1	0	1	0	1
$N - S$	1	1	1	0	1	1

Wenn $S - \{i\}$ für a, gegen b und gegen c stimmt, $\{i\}$ gegen a, für b und gegen c stimmt, sowie $N - S$ für a, für b und für c stimmt, ergeben sich Gewinnkoalitionen für a, für b und gegen c. Damit kann kollektiv die Aussage ”wenn (a und b), so c” nicht gelten, obwohl sie individuell jeweils gilt.

Aus logischer Sicht können wir ein einfaches Spiel mit Konstantsumme als **verneinungstreu** bezeichnen.

Ist nun die Regel verneinungstreu und folgerungstreu, so werden alle logischen Operationen ”strukturtreu” übersetzt (das heißt, sie ist ein logischer Homomorphismus). Damit gilt dann auch der

Satz 3.3. *Aus Folgerungstreue und Verneinungstreue folgt: Sind* $[a]$ *und* $[b]$ *Gewinnkoalitionen, so ist auch* $[a] \cap [b]$ *Gewinnkoalition.*

Nach Definition von [.] ist $[a] \cap [b]$ nämlich gleich $[a\, und\, b]$, und letzteres ist, da v strukturtreu ist, eine Gewinnkoalition. In der folgenden Tabelle sind die Wahrheitwerte für alle vier möglichen unterschiedlichen Belegungen der Variablen a und b notiert.

Aussage	a	non a	b	non b	wenn a so b	a und b
Koalition	[a]	[non a]	[b]	[non b]	[wenn a so b]	[a und b]
Fall 1	1	0	1	0	1	1
Fall 2	1	0	0	1	0	0
Fall 3	0	1	1	0	1	0
Fall 4	0	1	0	1	1	0

Der Schnitt aller Gewinnkoalitionen heißt **Vetokoalition** - ohne sie ist die Verabschiedung eines Satzes nicht möglich. Nach dem letzten Satz ist für logisch konsistenteSSpiele die Vetokoalition Gewinnkoalition, sie ist damit die einzige minimale Gewinnkoalition. Es gilt jedoch noch mehr: sie besteht nämlich aus nur einem Individuum, einem Diktator.

Satz 3.4. *Für eine verneinungstreue und folgerungstreue Aggregationsregel enthält die minimale Gewinnkoalition nur ein Individuum.*

Beweis. Sei nun S die Vetokoalition, also der Schnitt aller Gewinnkoalitionen. Damit ist S die kleinste Gewinnkoalition. Sei nun $i \in S$, dann ist N-i keine Gewinnkoalition. Da wir Konstantsumme voraussetzen, ist N-S+i Gewinnkoalition. Da aber der Schnitt von Gewinnkoalitionen eine Gewinnkoalition ist, ist

$$\{i\} = S \cap (N - S + i)$$

bereits Gewinnkoalition. S besteht also nur aus einem Individuum, nämlich i. □

Üblich ist es, ein solches im obigen Satz ausgezeichnetes Individuum als Diktator zu bezeichnen. Ein **Diktator** ist also ein Spieler i für den gilt:

$$v(S) = 1 \text{ genau wenn } i \in S.$$

Da mit der Auszeichnung eines besonderen Spielers die Symmetriebedingung verletzt ist, kann man die folgende Bedingung als rigorose Abschwächung der Symmetriebedingung verstehen:

Kein Spieler soll Diktator sein.

Will man auf Widerspruchsfreiheit und Folgerungstreue nicht verzichten, so gilt weiterhin, daß mit $[a]$ und $[b]$ auch $[a] \cap [b]$ Gewinnkoalition ist. Damit läßt sich zeigen:

Satz 3.5. *Die einzige symmetrische, widerspruchsfreie und folgerungstreue Aggregationsregel ist die Einstimmigkeitsregel (für N).*

4 Alternativenräume und Präferenzen

4.1 Borda und Condorcet

Im Jahr 1951 erschien Arrows Buch "Social Choice and Individual Values". Der Einfluß der darin enthaltenen Untersuchung der Aggregationsregeln für Präferenzordnungen ging weit über die Wohlfahrtsökonomie hinaus. Formalismen, die das ökonomische Handeln aus den Präferenzen bzw. aus den Nutzenfunktionen der Akteure (zugestanden unter gewissen Nebenbedingungen) erklärten, waren mittlerweile im Mainstream der Ökonomie vorherrschend. Betrachten wir statt irgendwelcher Aussagen Präferenzurteile, so liegt es nahe, nicht mehr von Einzelurteilen über Fragen vom Typ "ist Alternative x besser als y" auszugehen, sondern jedem Individuum gleich seine Präferenzrelation zuzuordnen, die ja alle diese Einzelurteile erzeugt. Die Frage ist dann: lassen sich die Präferenzenrelationen in eine Präferenzrelation in befriedigender Weise aggregieren. Wir bezeichnen die Menge der Alternativen mit X und mit m die Anzahl ihrer Elemente. Als Präferenzrelationen betrachten wir die Menge ord(X) der (strikten) Ordnungen auf X, also zweistellige Relationen, die transitiv, asymmetrisch und vollständig sind. Sie sind identifizierbar mit der Menge der Permutationen, es gibt also $m!$ solcher Ordnungen. Es sind auch andere Arten von Präferenzen betrachtet worden, etwa die Menge der reflexiven, transitiven und vollständigen Relationen (Arrow), die reflexiven, transitiven und antisymmetrischen Relationen (Debreu) und so weiter. Da sich die

Ergebnisse in ihrer Grundaussage nicht unterscheiden und die Notation für die Ordnungen am einfachsten ist, beschränken wir uns auf Präferenzen dieser Art; zudem lassen sie sich auch am einfachsten mit den Arbeiten von Condorcet und Borda vergleichen.

Den Ordnungen auf X können wir einen Aussagenraum zuordnen, der von den atomaren Aussagen $x > y$ mit $x, y \in X$, $x \neq y$ aufgespannt wird, d.h. alle Aussagen sind mittels logischer Operationen aus solchen Atomen erzeugt. Aufgrund der für Ordnungen gültigen Axiome sind jedoch nicht alle Atome mit Wahrheitswerten frei belegbar: es gelten bestimmte logische Abhängigkeiten.

Die Motivation für die Frage, wie Präferenzen zu aggregieren seien, stammt aus Problemen, die bei der gemeinsamen Wahl unter mehr als zwei Alternativen entstehen. Gedacht ist dabei meist an die Wahl eines Kandidaten. Als Auswahlregel ("voting rule") bezeichnen wir eine Abbildung

$$f : (ord(X))^N \to X : (>_i)_{i \in N} \to x$$

Demgegenüber werden Aggregationen der individuellen Ordnungen, also Abbildungen

$$f : (ord(X))^N \to ord(X) : (>_i)_{i \in N} \mapsto >$$

oft als "social welfare function" bezeichnet. Ein Element aus $(ord(X))^N$ nennen wir **Ordnungsprofil**.

Borda berichtete bereits 1770 (vgl. Borda 1784), daß nach der einfachen Mehrheitsregel unter Umständen ein Kandidat gewählt wird, der in einem Paarvergleich gegenüber allen anderen Kandidaten sich in der Minderheit fände (Borda-Effekt).

Wähler	Präferenz	$\#[y > x \, und \, z > x]$
1 bis 8	$x > y > z$	0
9 bis 15	$y > z > x$	7
16 bis 21	$z > y > x$	6

Seine Analyse geht auf Paarvergleiche zurück, also auf einzelne Fragen der Form "$x > y \, oder \, y > x$". Die Antworten werden jeweils mittels Mehrheitsentscheid zu einem gemeinsamen Urteil aggregiert, formal etwa aus Bordas Sicht $x > y$ genau wenn $\#[x > y] > \#[y > x]$ bzw. $\#[x > y] > \frac{n}{2}$ aus Condorcets Sicht, was nicht ganz dasselbe ist. Wir bezeichnen die letztere Relation als Condorcet-Relation. Condorcet betrachtet zahlreiche Beispiele. Wie er nachweist (Essai ...), kann insbesondere der Fall auftreten, daß die Condorcet-Relation einen Kandidaten an die Spitze setzt (den sogenannten Condorcet-Gewinner[5]), der in der direkten Stimmabgabe für den bevorzugten Kandidaten ("plurality vote") die geringste Stimmenanzahl erhalten hätte. Darüber hinaus entdeckt Condorcet, daß die per Mehrheitsentscheid aggregierten Einzelurteile zu Zyklizitäten führen können, so daß sie in jenen Fällen keine Ordnung ergeben (Condorcet-Effekt). In manchen dieser Fälle gibt es dann auch keine Condorcet-Gewinner. Die folgende Tabelle zeigt den einfachsten Fall.

Wähler	Präferenz
1	$x > y > z$
2	$y > z > x$
3	$z > x > y$

Wenn man nur darauf bedacht ist, einen Gewinner auszuzeichnen, könnte man hoffen, daß es fast immer einen Condorcet-Gewinner gibt. Das ist jedoch nicht der Fall. Für m=3 sind es zwar nur 12 der 216 möglichen Fälle, also 5,6%, und es wurde gezeigt (Garman/Kamien 1968), daß dieser Anteil nicht bedrohlich steigt; jedoch werden die kritischen Fälle unter wachsendem m schnell größer.

[5] Ein Kandidat x ist Condorcet-Gewinner, wenn er nach der Condorcet-Relation besser ist als jeder andere

n	1	3	5	7	9	...	25	...	∞
%	0	5,6	7,0	7,5	7,9	...	8,4	...	8,8

Für $n \to \infty$ und variiertes m erhält man die folgenden Grenzwerte (Niemi/Weisberg 1968; der Grenzfall unendlicher Alternativenräume wird von Rubinstein 1979 betrachtet).

m	1	2	3	4	5	10	2	30	40	∞
%	0	0	8,8	18	25	48	68	76	80	100

Für den Fall, daß die Alternativenräume jedoch zusätzliche Struktur tragen, die sich in geeigneter Weise in den möglichen Präferenzen widerspiegelt, kann ein Condorcet-Gewinner garantiert werden. Unter Umständen gilt dann sogar, daß die aggregierten Einzelurteile sich zu einer Ordnung fügen (davon später).

Borda hatte jedoch eine Möglichkeit entdeckt, das Scheitern der Aggregation von individuellen Präferenzen zu einer gemeinsamen Präferenz zu umgehen, indem er vorschlug, daß jeder Wähler alle Kandidaten gemäß seiner Präferenz in eine Rangreihe bringen soll, so daß der seiner Meinung nach beste den letzten Rang, d.h. die höchste Rangzahl erhält. Danach werden für jeden Kandidaten alle vergebenen Rangzahlen addiert und der Kandidat mit der höchsten Summe gilt als gewählt (falls Punktegleichstand eintritt, muß man durch eine Zusatzregel die Wahl entscheiden).

Die im Anschluß an Black (1948) und Arrow (1951) entstandene umfangreiche Literatur hat sowohl Auswahlregeln wie auch Präferenzaggregationen auf ihre Eigenschaften hin genau untersucht. Unter den Auswahlregeln sind es im wesentlichen Regeln vom Condorcet-Typ (”Condorcet consistent rules”) und vom Borda-Typ (”scoring methods”) die aufgrund ihrer günstigen Eigenschaften den Vorzug verdienen. Ein klare Zusammenfassung der wichtigsten Resultate findet man in Moulin (1988), ch.9.

4.2 ARROWS UNMÖGLICHKEITSTHEOREM

Im folgenden werden wir uns nicht so sehr für Auswahlregeln (voting rules) interessieren, als vielmehr für die Aggregation von Ordnungen. An Resultaten ist vor allem Arrows Unmöglichkeitstheorem breiteren Kreisen bekannt geworden. Es ist demnach unmöglich, daß eine Aggregation individueller Ordnungen (”social welfare function”) bei mindestens drei Alternativen die folgenden drei Eigenschaften gleichzeitig erfüllt (vgl. auch Sen 1968):

(P) das Pareto-Prinzip (Einstimmigkeit): aus $[x > y] = N$ folgt $x > y$

(IIA) Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen: wenn für zwei verschiedene Ordnungsprofile (Vektoren individueller Ordnungen) die Urteile bezüglich eines Paarvergleiches übereinstimmen, so stimmen auch die kollektiven Urteile bei diesem Paarvergleich überein. Damit sind die kollektiven Urteile bei einem Paarvergleich nur von den individuellen Urteilen bei diesem Paarvergleich abhängig.

(nD) Es gibt kein Individuum i, dessen Präferenzordnung $>_i$ für alle Ordnungsprofile $(>_i)_{i \in N}$ jeweils mit $>$ übereinstimmt.

Es gibt eine Vielzahl von Varianten dieses Satzes. So wird zum Beispiel für die kollektive Präferenz Indifferenz zugelassen (Arrow 1951, Moulin pp.289f). Die Beweisführung, die unseren Überlegungen in Abschnitt 2 analog ist, nutzt IIA zur Beschränkung auf die Betrachtung weniger atomarer Aussagen $x > y$ und ihrer Fürsprecherkoalitionen $[x > y] := \{i \in N; x >_i y\}$. Da Ordnungen transitiv und vollständig sind, läßt sich aus der Gültigkeit atomarer Aussagen die Gültigkeit weiterer Aussagen folgern. Für die aggregierte Relation heißt

- ... Vollständigkeit: für $x \neq y$ gilt entweder $x > y$ oder $y > x$; für die Fürsprecherkoalitionen gilt $[x > y] + [y > x] = N$.
- ... Transitivität: aus $x > y$ und $y > z$ folgt $x > z$. Für die Fürsprecherkoalitionen gilt $[x > z] \supset [x > y] \cap [y > z]$.

Die hier angedeutete Übertragung der Vollständigkeit und der Transitivität entspricht der Verneinungstreue und der Folgerungstreue in Abschnitt 2, weshalb man sich nicht wundern darf, daß nur ein Diktator für diese logische Konsistenz sorgen kann.

Eine Koalition S heißt für ein geordnetes Paar (x,y) **entscheidend** (decisive) genau dann, wenn für alle Elemente aus $ord(X)^N$ gilt, daß aus $S = [x > y]$ das aggregierte Urteil $x > y$ folgt. Die Menge der für (x,y) entscheidenden Koalitionen sei mit W(x,y) bezeichnet. Wenn man will, kann man in dieser Menge die Gewinnkoalitionen eines Spieles (N,v) mit v=v(x,y) sehen.

Bemerkung:

1. Gilt (IIA), so ist eine Koalition S genau dann für (x,y) entscheidend, wenn es ein Ordnungsprofil gibt, für das $S = [x > y]$ und das aggregierte Urteil $x > y$ gilt. Nach (IIA) gilt dann für jedes andere Ordnungsprofil T mit $T = [x > y]$ ebenfalls $x > y$.
2. Sei S für (x,y) entscheidend. Wäre S für (y,x) nicht entscheidend, so gilt $x > y$ oder es existiert kein $T = [y > x]$. Da letzteres nach Voraussetzung (alle Profile sind zugelassen) nicht sein kann, gilt also $x > y$.

Satz 4.1. *Gilt (P) und (IIA), so gilt für alle* $w, x, y, z \in X$
$W(x, y) = W(w, z)$

Bemerkung: man kann auch sagen, sie generieren alle dasselbe Spiel.

Beweis. Seien x,y fest. Sei $T \in W(x, y)$.

1. Wir zeigen $T \in W(x, z)$ für alle $z \neq x$.
   Dazu betrachten wir ein Profil, für das gilt: $T = [x > y > z]$ und $N - T = [y > z > x]$
   $x > y$ gilt nach Voraussetzung, $y > z$ nach Einstimmigkeit, $x > z$ nach Transitivität.
   Da $T = [x > z]$, ist $T \in W(x, z)$.
2. Wir zeigen $T \in W(w, z)$ für alle $w, z \neq x$.
   Dazu betrachten wir ein Profil, für das gilt: $T = [w > x > z]$ und $N - T = [z > w > x]$
   $x > z$ gilt, da $T \in W(x, z)$, $w > x$ nach Einstimmigkeit, $w > z$ nach Transitivität.
   Da $T = [w > z]$, ist $T \in W(w, z)$.
3. Bleibt noch zu zeigen: $T \in W(w, x)$ für alle $w \neq x$.
   Dazu betrachten wir ein Profil, für das gilt: $T = [w > z > x]$ und $N - T = [z > x > w]$
   $w > z$ gilt da $T \in W(w, z)$, $z > x$ nach Einstimmigkeit, $w > x$ nach Transitivität.
   Da $T = [w > x]$, ist $T \in W(w, x)$.

□

Satz 4.2. *Gilt (P) und (IIA), so gilt (nD) nicht.*

Bemerkung: man kann auch sagen, dann gibt es einen Diktator.

Beweis. Nach dem letzten Satz werden Paarvergleiche über ein Spiel generiert. Sei T eine minimale Gewinnkoalition. Wir nehmen an, T enthalte mehr als einen Spieler. Dann können wir T in zwei disjunkte Koalitionen T_1 und T_2 zerlegen. Wir betrachen das folgende Profil: $T_1 = [x > y > z]$, $T_2 = [y > z > x]$ und $N - T = [z > x > y]$. Es gilt $T_1 = [x > z]$, $T_2 = [y > x]$ und $N - T = [z > y]$. Die Koalitionen T_1 und T_2 sind keine Gewinnkoalitionen, denn sonst wäre T nicht minimal. Da T Gewinnkoalition ist, ist N-T auch keine Gewinnkoalition. Somit gilt $z > x$, $x > y$ und $y > z$. Das widerspricht der Transitivität. Also enthält T nur einen Spieler, den Diktator. □

Auf die Beziehung zwischen Präferenzaggregation und logischer Aggregation (Formelalgebra mit den Atomen $x > y$ etc.) hatte 1952 bereits Granger aufmerksam gemacht. Logisch betrachtet bewirkt (IIA) und (P), daß man die Aggregation von Ordnungen über Paarvergleiche anstellen kann, wobei diese mit einem einfachen Spiel aggregiert werden. Die Aggregationsregel ist logisch konsistent, so daß das Spiel Konstantsumme hat und Schnitte von Gewinnkoalitionen wieder Gewinnkoalitionen sind. Damit ist die aggregierte Relation eine Ordnung, und das Spiel hat einen Diktator.

Nicht jede mögliche Auswahlregel stützt sich auf eine binäre Relation. Sen gibt als Beispiel einer Regel C, die nicht von einer binären Relation stammt:

$$C(\{1,2,3\})=\{1\},\ C(\{1,2\})=\{2\}$$

Man kann dazu fragen (Sen 1970, p.17):

Wenn ein Pakistani Weltmeister wird, ist er dann auch Meister von Pakistan?

Um auf Condorcet und Borda zurückzukommen: Beide wählen den Weg, bei der Auswahl auf Präferenzen zurückzugehen, um diese zu aggregieren. Gewählt werden dann die in dieser Ordnung optimalen Kandidaten bzw. Alternativen. Da sie alles andere als Diktatoren wünschen, indem sie ja auf Gleichbehandlung bestehen (also auf Symmetrie, übrigens nicht nur der Wähler, sondern auch der Kandidaten; erstere Eigenschaft läuft unter dem Namen Anonymität, letztere unter dem Namen Neutralität) verzichten beide auf ein Stück logischer Konsistenz: Im einen Falle wird die Ordnung erzwungen, aber dafür wird gegen IIA verstoßen. Im anderen Falle bleiben unaggregierbare Fälle übrig. Beides kann von Vorteil sein (vgl. zum einen Young 1975 und Moulin 237-240, zum anderen May 1951 und Moulin, p.286f).

4.3 Strukturen, die Aggregierbarkeit erzeugen

Von Black (1948) und Arrow (1951) stammt ein Satz über die Möglichkeit, Präferenzen bestimmten Typs zu aggregieren. Dieser Satz besagt, daß bei einer ungeraden Anzahl von Individuen, die alle durch sogenannte "eingipflige"[6] Präferenzen charakterisiert werden können, die Condorcet-Relation transitiv ist, und damit insbesondere einen Condorcet-Gewinner ausweist. Der Satz kann in verschiedene Richtungen verallgemeinert werden. Er ist ein Beispiel dafür, daß, wenn die Präferenzordnungen auf Nutzenfunktionen eines bestimmten Typs zurückgeführt werden können, der auf die besondere Struktur des Alternativenraumes bezug nimmt, Aggregierbarkeit folgen kann. In vielen praktischen Problemen ist die Annahme solcher Präferenzen plausibel.

Mit Black und Arrow mag man wir zunächst an ein Parteienspektrum denken, das sich von links nach rechts anordnen läßt. Jeder Wähler mag sich dann auf dieser Skala "verorten", indem seinem "idealen Standpunkt" die höchste Präferenz zukommt und die Präferenz mit abnehmender Entfernung sinkt. Eine Verallgemeinerung stellen solche Standortkonflikte (in einem n-dimensionalen Raum von Charakteristika

[6]Präferenzen heißen eingipflig, wenn es genau eine optimale Alternative gibt, den "Gipfel", und die Alternativenmenge so (linear) angeordnet werden kann, daß der Gipfel die Menge in einen unteren Teil mit ansteigender Präferenz und einen oberen Teil mit abnehmender Präferenz trennt (einer der beiden Teile kann auch leer sein).

der Alternativen) dar, bei denen ebenfalls jedes Individuum einen idealen Standpunkt hat und die Präferenz mit zunehmender Entfernung abnimmt. In all diesen Fällen sprechen wir von eingipfligen Präferenzen, die zu einem (verallgemeinerten) Median aggregiert werden können. Für abstoßende Standortkonflikte, also solche, bei denen für jedes Individuum die Präferenz mit wachsender Entfernung von seinem Standort zunimmt, gibt es im allgemeinen keine Condorcet-Optima.[7]

4.4 Gegenüber strategischem Handeln stabile Regeln

Unter welchen Umständen gibt es nicht manipulierbare Methoden der Wahl und der Abstimmung? Condorcet scheint gehofft zu haben, daß die richtige Wahl- bzw. Abstimmungsmethode helfen könnte, durch aufgeklärte Repräsentanten, gerechte Entscheidungen im Interesse aller zu erreichen. Einerseits zeigt Condorcet wahrscheinlichkeitsbasierte Vorteile von Gruppenurteilen (dazu weiter unten), andererseits auch die Möglichkeit des Fehlens eines Optimums im Aggregat (wie oben bereits berichtet). Die idealen Entscheider orientieren sich bei Condorcet an Wahrheit und Gerechtigkeit und nicht (nur) an ihrem Einzelinteresse. Wenn aus Eigennutz bei Urteilen gelogen wird, so erscheint dies als Fehler der Menschen oder von Institutionen, die sie in Abhängigkeit und ohne Bildung halten, nicht aber als Fehler einer Regel, die Anreize zum Lügen setzt. Die strategische Anfälligkeit der Regeln werden bei Condorcet noch nicht systematisch zum Thema gemacht.

Unter der Bedingung, daß nur solche Präferenzen aggregiert werden, deren Ordnungsprofile einen Condorcet-Gewinner aufweisen, gibt es einen weiteren Grund der strategischen Anfälligkeit wenig Beachtung zu schenken: im Falle ungerader Individuenzahl ist die Regel "wähle den Condorcet-Gewinner" unempfindlich gegen strategisches Verhalten (vgl. Moulin, Lemma 10.3, p. 263). Um das zu präzisieren, betrachten wir im folgenden eine formale Definition strategischer Anfälligkeit.

Ist eine Auswahlregel gegeben, also eine Regel f, die jedem Ordnungsprofil $(>_i)_{i \in N}$ eine Alternative $f((>_i)_{i \in N}) = x \in X$ zuweist, und die Präferenzen der Individuen sind nicht öffentlich bekannt, so können die Individuen ihre Präferenz als strategische Variable betrachten und versuchen, durch Nennung einer geeigneten von ihrer eigenen Präferenz abweichenden Präferenz ein für sie vorteilhafteres Ergebnis zu erzielen.

Spieltheoretisch ist diese Situation als nicht-kooperatives Spiel $(N, (Y_i)_{i \in N}, (u_i \circ f)_{i \in N})$ modellierbar, wobei die individuellen Stategienräume $Y_i = ord(X)$ und $u_i(x)$ der Rang von x in der Ordnung $>_i$ ist. Man beachte, daß die Funktionen u_i nur bis auf ordinale Umskalierung gegeben ist.

Als (individuell) **strategieanfällig** bezeichnet man ein Regel f, für die $(u_i)_{i \in N}$ kein Nash-Gleichgewicht darstellt. In einem solchen Fall, gäbe es für zumindest ein Individuum i eine Strategie $y_i \neq >_i$ für die $u_i(f(y_i, (>_j)_{j \neq i})) > u_i(f((>_k)_{k \in N}))$, mit der man gegenüber unverfälscht sich äußernden Partnern sich durch Verfälschung Vorteile verschaffen kann.

Solche Verfälschungen können zum Beispiel Übertreibungen sein, mit denen ein Einzelner eine sonst bedrohliche Alternative abstuft. Das Nash-Gleichgewicht macht allerdings nur individuelle Manipulationen unattraktiv. Weitere Manipulationsmöglichkeiten ergeben sich jedoch durch koordiniertes Verhalten. In solchen Fällen können sich Koalitionen durch gemeinsame Verfälschungen Vorteile verschaffen. Ist jedoch - wie oben - die Existenz ein Condorcet-Gewinners garantiert und die Individuenzahl ungerade, so ist die Regel "nimm den Condorcet-Gewinner" auch bezüglich der Koalitionen strategieunanfällig.

Betrachten wir nun wieder die Situation, in der alle möglichen Präferenzen auf einem Alternativen-

[7] Die meisten Erweiterungen von Blacks Theorem gelten nur unter sehr restriktiven Bedingungen.

raum zulässig sind. Der **Satz von Gibbard-Satterthwaite** (Gibbart 1973, Satterthwaite 1975) besagt nun, daß - mindestens drei Alternativen vorausgesetzt - eine Auswahlregel nur um den Preis eines Diktators strategieunanfällig sein kann.

Ist eine Regel jedoch strategieanfällig (also ohne Nash-Gleichgewicht oder zumindest ohne Koalitionsgleichgewicht), so heißt das noch lange nicht, daß sich ein (von $>_i$) abweichendes Individuum i bzw. eine abweichende Koalition einen Vorteil sichern kann, denn die anderen (die "Opposition") können unter Umständen durch ihr Abweichen jenen angestrebten Vorteil verhindern.

Es ist deshalb sinnvoll, explizit das zu betrachten, was man sich auch sichern kann. Zu einer Auswahlregel $f : (ord(A))^N \to X$ gehört das einfache Spiel (N, v_f), das genau die Koalitionen als Gewinnkoalitionen auszeichnet, die jede Alternative durchsetzen können. Formal können wir das schreiben als:

$$v_f(S) = 1 \Leftrightarrow \bigwedge_{a \in A} \bigvee_{y_S} \bigwedge_{y_{N-S}} f(y_S, y_{N-S}) = a$$

Wir bezeichnen dieses Spiel als **Begleitspiel** der Regel.

Ist eine Auswahlregel Condorcet-konsistent oder ist sie vom Borda-Typ, so ist das Begleitspiel im wesentlichen[8] gegeben durch (Moulin, p. 268):

Typ	$v(S) = 1$	$v(S) = 0$
Condorcet-konsistent	$\#S > \#N-S$	$\#S < \#N-S$
Borda	$\#S > 2\#N-S$	$\#S < 2\#N-S$

Für diese betrachteten Auswahlregeln wird ein Condorcet-Gewinner bzw. ein Borda-Gewinner erzwungen. Betrachten wir die Situation für 5 Individuen. Im Falle von Condorcet-Konsistenz hat das Begleitspiel alle Drei-Personen-Koalitionen als minimale Gewinnkoalitionen, im Falle von Borda-Regeln sind es alle Vier-Personen-Koalitionen, die als minimale Gewinnkoalitionen fungieren.

Zwar können Gewinnkoalitionen jede Alternative erzwingen, es ist jedoch zu fragen, ob sich die Mitglieder einer Gewinnkoalition auch auf eine Alternative einigen können. Für den Zweck der Aggregierbarkeit der Meinungen aller wäre es allerdings angebrachter, danach zu fragen, ob es zumindest eine Alternative gibt, die von keiner Gewinnkoalition zu Fall gebracht werden kann. Gesucht ist also eine Lösung in der großen Koalition. Das Lösungskonzept ist der kooperativen Spieltheorie entlehnt und heißt **Core des Auswahlkonfliktes**[9]. Damit werden jedem Auswahlkonflikt, einem Tripel $(X, (>_i), f)$ aus Alternativenraum, Präferenzen und Auswahlregel, jene Alternativen zugeordnet, der keine andere Alternative von irgendeiner Gewinnkoalition vorgezogen wird. Formal läßt sich schreiben:

$$Core(X, (>_i), f) = \{x \in X; \bigwedge_{a \in X} v_f([a > x]) = 0\}$$

Werten wir jedes Element als eine Lösung des Aggregationsproblems, so können wir, wenn das Core nicht leer ist, dies als Aggregierbarkeit interpretieren.

[8] Im Bereich der Koalitionen mit $\#S = \#N\text{–}S$ bzw. $\#S = 2\#N\text{–}S$ sind unterschiedliche Auflösungen des "Patts" möglich.

[9] Der Begriff Core ist gerechtfertigt, da man das übliche Core eines einfachen Spieles dadurch erhält, daß man als Alternativenraum, über den Gewinnkoalitionen verfügen können, die Menge $\{x \in I\!R^n; \sum\{x_i; i \in N\} = 1\}$ einsetzt. Für das Core eines einfachen Spieles ist bekannt, daß es nur für Vetospiele nicht leer ist.

Man kann nun zeigen, daß das Core des Auswahlkonfliktes für alle möglichen Präferenzprofile nicht leer ist[10], wenn der Alternativenraum verglichen mit der "Nähe" des Begleitspieles zu der Klasse der Vetospiele klein ist. Je größer der Alternativenraum, desto ähnlicher muß das Begleitspiel einem Vetospiel werden. Als kritische Größe kann man die mögliche Variation durch Entscheide unterschiedlicher Gewinnkoalitionen auffassen. In einem Vetospiel haben alle Gewinnkoalitionen nicht-leeren Schnitt, die mögliche Variation ist deshalb null. Nur so, so haben wir in Abschnitt 2.4 gesehen, läßt sich Folgerungstreue erreichen. Wenn je zwei Gewinnkoalitionen nicht-leeren Schnitt haben, also im Falle der Superadditivität, ist eine gewisse Variation zugelassen; sie ist jedoch bereits so eingeschränkt, daß sich mit Spielen dieser Art Widerspruchsfreiheit erreichen läßt. Eine stärkere Einschränkung ergibt sich, wenn je k Gewinnkoalitionen nicht-leeren Schnitt haben, denn dann können diese k Gewinnkoalitionen nicht völlig unterschiedliche Meinungen vertreten. Die Klassifizierung der Spiele in Klassen dieser Art stammt von Post (1941) und wir werden sie weiter unten etwas genauer betrachten.

Betrachten wir die maximale Zahl k, für die je k Gewinnkoalitionen nicht-leeren Schnitt haben, so ist entweder k+1 die kleinste Zahl, für die k+1 Gewinnkoalitionen existieren, die leeren Schnitt haben, oder der Schnitt aller Gewinnkoalitionen ist nicht leer (ist also ein Spiel mit Vetokoalition). Diese Zahl k+1 bzw. ∞ für den Fall der Spiele mit Vetokoalition heißt **Nakamura-Zahl**. Ihr Kehrwert ist ein Maß für die mögliche Variation im effektiven Meinungsspektrum.

Es gilt nun folgender Satz (Nakamura 1975, Moulin p. 269):

Satz 4.3. *Das Core aller möglichen Auswahlkonflikte mit mit fester Spielermenge, fester Alternativenmenge X und fester Auswahlregel ist nicht leer, genau wenn die Nakamura-Zahl des Begleitspieles größer als die Anzahl der Alternativen ist.*

Bemerkungen:
Die Eigenschaft einer Auswahlregel, daß das Core aller möglichen Auswahlkonflikte mit mit fester Spielermenge, fester Alternativenmenge X und fester Auswahlregel ist, nicht leer ist, wird auch als Corestabilität bezeichnet.
Der Kehrwert der Nakamura-Zahl mißt die mögliche Variation im effektiven Meinungsspektrum. Um Zyklen von aggregierten Präferenzurteilen zu konstruieren, die es unmöglich machen, eine optimale Alternative auszuzeichnen, bedarf es ausreichender Variationmöglichkeiten im effektiven Meinungsspektrum. Sind diese nicht gegeben, läßt sich auch die Strategieanfälligkeit der Regel gegen (in Koalitionen) koordiniertes Handeln ausschließen.

Sollen die Regeln alle n Individuen gleich behandeln, so kann man die symmetrischen gewichteten Majoritätsspiele (q;1,...,1) zur Aggregation benutzen. Die Nakamura-Zahl r dieser Spiele ist gegeben durch:

$$r \geq \frac{n}{n-q} > r-1$$

Damit folgt, daß bei m Alternativen, Corestabilität eine hohes Mehr q voraussetzt, das sich mit steigender Alternativenzahl schnell der Einstimmigkeit nähert, nämlich:

$$q > n\frac{m-1}{m}$$

[10] Es gilt sogar, daß die via Begleitspiel aggregierte Präferenzrelation azyklisch ist.

5 ZUGANG ZUR WAHRHEIT - EIN WAHRSCHEINLICHKEITSKALKÜL

Für Condorcet war eine wesentliche Aufgabe der Aggregationsregeln, der Vernunft und der Wahrheit zum Sieg zu verhelfen. In unseren Betrachtungen wurden binäre Urteile aggregiert. In moderner Interpretation stellt man sich eher ein Paket individueller Interessen vor, die zu einem Gemeininteresse oder zu einem vernünftigen Kompromiß geleitet werden sollen.

Da die ”Vernunft” nicht durch die Aggregationsregel alleine gewährleistet werden kann, zieht Condorcet den Schluß, daß außer einer möglichst guten Regel weitere Bedingungen zu erfüllen sind. Da er auch voraussetzt, daß ”vernünftige Dialoge” stattfinden können und jede Regel mit Vorsicht zu benutzen ist, also auf manche Abstimmung verzichtet wird, um nicht unsinnige Resultate zu produzieren, muß das Staatswesen vor allem Bedingungen zu schaffen versuchen, die es den Bürgern erlauben, ”vernünftig”, ”frei” und ”unabhängig” zu urteilen. Die staatliche Garantie der Menschenrechte gehört hierzu, die Bevormundung durch religiöse, hoheitliche und wirtschaftliche Mächte soll beendet werden. Die Menschen sollen frei werden, die ”Wahrheit” zu erkennen.

> La vérité d'une décision dépend principalement de trois causes: des lumières et de la justesse d'ésprit des opinants, considérés individuellement; de la manière dont la discussion influe sur eux, soit pour leur donner de nouvelle lumières, soit pour les égarér; enfin, de l'influence plus ou moins forte des motifs étrangers à la vérité de la décision; influence qui peut ou séduire, ou faire agir de mauvaise foi. Il faut donc qu'une constitution remplisse les quatre conditions suivantes: que les votants soient éclairés; qu'ils ne soient ni corrompus, ni capables de se livrer à des préjugées conformes à leurs intérêts; que la discussion ne serve qu'à les instruire; que leurs préjugés ou leur corruption ne puissent trop influencer sur la décision. La première et la seconde condition dépendent da la manière dont ils sont élus; les deux autres de la forme de l'assemblée. C'est donc pour remplir ces deux conditions qu'elle doit être constituée. (Examen sur cette question, Œuvres, t. 9, p. 338)

Das Gelächter der Welt zieht nicht nur ein Gremium auf sich, das widersprüchliche oder logisch unsinnige Beschlüsse faßt, sondern auch ein Gremium, daß über Sachverhalte irrt, und dem dieser Irrtum später mit der Anmerkung vorgehalten wird: ”das weiß doch jedes Kind”. So hat beispielsweise im Jahr 1897 das Repräsentantenhaus von Indiana einstimmig beschlossen, daß die Zahl π den Wert 3,2 hat. Benutzt man also die Aggregationsregel zur Wahrheitsfindung, so mag das Resultat falsch sein. Menschen können irren, Gremien auch. Condorcet stellt also die Frage, wie wahrscheinlich ein Irrtum des Gremiums bei der Anwendung der Mehrheitsregel ist.

Ein bekanntes Resultat dieser Untersuchungen ist das Condorcet Jury Theorem (Essai, pp. 3-14, 1785). In moderner Fassung findet man es bei Owen/Grofman/Feld 1989:

Satz 5.1. *Es sei n ungerade. Seien der Zugang eines Einzelnen zur Wahrheit durch eine Zufallsvariablen mit den Werten 1 (”hat recht”) und 0 (”irrt”) dargestellt. Seien des weiteren diese Zufallsvariablen unabhängig voneinander. Ist nun für alle Mitglieder der Gruppe die Wahrscheinlichkeit p des Irrtums gleich und wird nach der Mehrheitsregel entschieden, so sinkt die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums des Gremiums für $p < \frac{1}{2}$ und wächst für $p > \frac{1}{2}$ (jeweils strikt), wenn die Gremiengröße wächst. Die entsprechenden Grenzwerte für $n \to \infty$ sind 1 bzw. 0.*

Nutzen wir ein beliebiges einfaches Spiel (N,v), um die Werte x_i der Zufallsvariablen X_i , $i \in N$ zu aggregieren, so ist $v((X_i)_{i \in N})$ die Zufallsvariable, die den Wahrheitswert der aggregierten Meinung angibt. Eine völlig andere Interpretation derselben Struktur stammt aus der statistischen Zuverlässigkeitstheorie;

hier repräsentiert das Spiel (N,v) eine Schaltung, deren Zuverlässigkeit $v((X_i)_{i \in N})$ von den Zuverlässigkeiten X_i der Komponenten $i \in N$ abhängt.

Weitere Verallgemeinerungen der Fragestellung liegen darin, daß man die Unabhängigkeit der Zugänge zur Wahrheit oder die Gleichheit der individuellen Irrtumswahrscheinlichkeiten aufgibt. Beide Möglichkeiten hat Condorcet (beschränkt auf die Mehrheitsregel) bereits ausführlich[11] in Beispielen und analytisch untersucht (Essai, pp. 248-251 bzw. Essai, pp. 252-255 und 259-264).

Nach Condorcet ist eine ähnliche Forschung meines Wissens erst knapp 50 Jahre später wieder betrieben worden. Im Jahr 1838 erscheint das Buch "Recherche sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédés des règles générales du calcul des probabilités" von Poisson, in dem die Wahrheitswürdigung vor Gericht, als Aufgabe der Aggregation der Zeugenaussagen anhand ihrer Glaubwürdigkeit untersucht wird.

Wenn die Mitglieder der Gruppe ungleichen Zugang zur Wahrheit haben, so aggregiert die Mehrheitsregel unter Umständen etwas seltsam. Für entsprechende Effekte findet man bei Groffman/Owen/Feld 1983, Owen/Groffman/Feld 1989 Beispiele. Ein Gruppe von drei Individuen seien durch folgende Irrtumswahrscheinlichkeiten charakterisiert $p_1 = 0,72$, $p_2 = 0,72$, $p_3 = 0$. Die mittlere Irrtumswahrscheinlichkeit liegt bei $\bar{p} = 0,48$, nach der Aggregation durch die Mehrheitsregel ergibt sich jedoch eine Gruppenirrtumswahrscheinlichkeit von $P = 0,52$. Im spiegelbildlichen Falle $p_1 = 1$, $p_2 = 0,28$, $p_3 = 0,28$, in dem ein Individuum immer irrt, ergibt sich dennoch eine Gruppenirrtumswahrscheinlichkeit von nur $P = 0,48$ (die mittlere Irrtumswahrscheinlichkeit liegt bei $\bar{p} = 0,52$). Die oben genannten Autoren zeigen, daß die Grundaussage des Condorcetschen Jury Theorems jedoch insofern erhalten bleibt, als beim Vergrößern der Gruppengröße eine mittlere Irrtumswahrscheinlichkeit $\bar{p} < 0,5$ die Gruppenirrtumswahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert (und entsprechend für $\bar{p} > 0,5$ gegen 1). Im Limes könnte man sich also nach dem Gruppenmittel richten.

Wird die Unabhängigkeit der Urteile aufgegeben, ist die Analyse im allgemeinen erheblich schwieriger (Ramamurthy/Parthasarathy 1988). Meist wurden nur einfachere Sonderfälle, wie das Vorliegen einer Meinungsführerschaft behandelt.

6 Mehr über einfache Spiele

6.1 Blockaden, das duale Spiel und die Konstantsummenerweiterung

In der hier entwickelten Anwendung einfacher Spiele dienen diese dazu, über die Annahme von Sätzen zu entscheiden. Bei einer Jury mag es beispielsweise darum gehen, ob man Aussagen für wahr hält, in einem Parlament mag die Verabschiedung (oder Verwerfung) eines Gesetzes anstehen. In jedem Falle ist jedoch mit der Aggregationsregel Macht verteilt worden, die von Interessierten genutzt werden kann. Dabei gibt es durch Kooperation in geeigneten Koalitionen im allgemeinen nicht nur die Macht einen bestimmten Satz zu beschließen, sondern auch die Möglichkeit, sich zur Abwehr, also zur Blockade, eines bestimmten Beschlusses zusammenzufinden.

Ist das Spiel ein Konstantsummenspiel, so fallen Entscheidungsmacht und Blockierungsmacht zusammen. Ist ein Spiel (N, v) gegeben, so werden im Spiel (N, v^*) mit $v^*(S) = 1 - v(N - S)$ genau die Koalitionen als Gewinnkoalitionen ausgezeichnet, die zuvor in (N, v) die Macht hatten, einen Beschluß zu verhindern. Dieses Spiel (N, v^*) heißt das (zu (N, v)) **duale Spiel**.

[11] Der entsprechende Essai umfaßt mehr als 300 Seiten und zusätzlich eine Einleitung mit mehr als 100 Seiten.

Für die Dualität $* : v \to v^*$ gilt $(v^*)^* = v$. Die Konstantsummenspiele sind genau die "selbstdualen Spiele", also solche mit $v = v^*$, denn nach Definition der Dualität gilt $v(S) + v(N - S) = 1$.

Für gewichtete Majoritätsspiele ist das duale Spiel leicht zu bestimmen. Ist nämlich $(\lambda; m_1, m_2, ..., m_n)$ eine Repräsentation des gewichteten Majoritätsspieles (N, v), so ist $((1 - \lambda) + \sum_i m_i; m_1, m_2, ..., m_n)$ eine Repräsentation von (N, v^*).

Wie wir eingangs diskutiert haben, kann man die Konstantsummeneigenschaft in bestimmten Kontexten als wünschenswert ansehen. Ist ein superadditives Spiel gegeben, so kann man durch Hinzunahme eines weiteren Spielers und der um ihn vermehrten bisher blockierenden Koalitionen ein Konstantsummenspiel herstellen.

Um die **Konstantsummenerweiterung** $(\hat{N}, \hat{v})$ eines superadditiven Spieles (N, v) zu erhalten wird die bisherige Spielermenge $N = \{1, ..., n\}$ zu $\hat{N} = N \cup \{n + 1\}$ erweitert und $\hat{v}$ wie folgt definiert:

$$\hat{v}(S) = \begin{cases} v(S) & \text{wenn} \quad n + 1 \notin S \\ 1 - v(N - S) & \text{wenn} \quad n + 1 \in S \end{cases}$$

Wiederum ist es für gewichtete Majoritätsspiele, für die man eine Repräsentation kennt, einfach, eine Repräsentation der Konstantsummenerweiterung anzugeben. Wenn $(\lambda; m_1, m_2, ..., m_n)$ Repräsentation von (N, v), so ist $(\lambda; m_1, m_2, ..., m_n, 2\lambda - 1 - \sum_i m_i)$ Repräsentation von $(\hat{N}, \hat{v})$.

6.2 Komponierte Spiele und Post'sche Klassen

Der Raum aller einfachen Spiele mit einer beliebig großen endlichen Spielermenge sei mit $\mathcal{V}$ bezeichnet. Unter einem **Dummy** versteht man einen Spieler der in keiner minimalen Gewinnkoalition enthalten ist, den man also "nicht braucht". Wir betrachten nun 4 Operationen, die als Post'sche Operationen bezeichnet werden. Es sind:

1. Hinzufügung eines Dummies
2. Zusammenfassung zweier Spieler
3. Permutation von Spielern
4. Komposition

Während die ersten drei Operationen kaum einer weiteren Erklärung bedürfen, müssen wir zur Definition der Komposition etwas Sorgfalt aufwenden. Sei $\{N_1, N_2, ..., N_m), \#M = m$ eine Partition von N, also eine Zerlegung in m disjunkte Mengen. Man **komponiert** Spiele $(N_1, v_1), (N_2, v_2), ..., v_m)$ durch ein "aggregierendes" Spiel (M, w), zu einem Spiel (N, v), indem man setzt:

$$v(S) = w(S \cap N_1, S \cap N_2, ..., S \cap N_m)$$

Man schreibt dann auch $v = w[v_1, v_2, ..., v_m]$. Die Komposition entspricht der Situation, in der die Gruppe der Entscheider aufgeteilt wird in m "Wahlkreise" und das Spiel zwischen den "Repräsentanten" die Entscheidungen der Wahlkreise aggregiert. Eine weitere Anwendung wäre ein Mehrkammersystem, bei dem die Entscheidungen der m Kammern mittels des Spieles w aggregiert werden.

Um den Mechanismus diese Post'schen Operationen zu veranschaulichen, seien ein paar Spiele exemplarisch betrachtet. Mit **id** bezeichnen wir das Spiel mit einem Spieler. Fügen wir Dummies hinzu, so entstehen Spiele mit einem Diktator.

Das Kürzel **maj** bezeichne das Spiel mit den minimalen Gewinnkoalitionen 110, 101, 011, also das kleinste Konstantsummenspiel.

Fassen wir zwei Spieler zusammen, so erhalten wir aus maj das Spiel **et** mit der einzigen Gewinnkoalition 11, also das kleinste Einstimmigkeitsspiel. Die Konstantsummenerweiterung gehört nicht zu den Post'schen Operationen; dennoch ist sie hier von Interesse, denn $\hat{et} = maj$.

Das Spiel mit den minimalen Gewinnkoalitionen 110 und 101 heißt **veto**; permutieren wir die Spieler mittels der Permutation α so ergeben sich zwei weitere "Versionen" von veto; veto ist das kleinste Spiel mit einer Vetokoalition, die selbst keine Gewinnkoalition ist.

Das Spiel mit den beiden minimalen Gewinnkoalitionen 10 und 01 heißt **vel**; es ist dual zu et.

Betrachtet man ein Zweikammersystem, bei dem beide Kammern zustimmen müssen, um einen gemeinsamen Beschluß zu verabschieden, so benutzen wir das Spiel et zur Aggregation. Diese Spiele sind in den seltesten Fällen gewichtete Majoritätsspiele. In Shapleys Liste (Shapley 1962) der kleinen einfachen Spiele findet man das Spiel et[vel,vel], das weder superadditiv ist noch dual zu einem superadditiven Spiel (das duale Spiel ist vel[et,et]).

Wir definieren mit Post, daß ein Spiel zur Klasse $\mathcal{F}^k$ gehört, falls k Gewinnkoalitionen immer nichtleeren Schnitt haben. So können wir die superadditiven Spiele auch die Klasse $\mathcal{F}^2$ bezeichnen. Die Spiele Die in Abschnitt 3.4 betrachteten Spiele mit einer Nakamura-Zahl r, sind danach Element aller Klassen $\mathcal{F}^k$ mit $k < r$. Damit können wir Nakamuras Satz nun auch schreiben als

$$\text{Corestabilität ist gleichwertig mit } v \in \mathcal{F}^{\#A}$$

Ergänzen wir die F-Klasse durch die Definition, daß ein Spiel zur Klasse $\mathcal{F}^\infty$ gehört, falls der Schnitt aller Gewinnkoalitionen nicht leer ist, so haben wir eine neue Einordnung der Vetospiele[12].

Der folgende **Satz von Post** (1941), gibt Einblick in die Struktur des Raumes aller einfacher Spiele $\mathcal{V}$. Dabei bezeichnen wir mit $\ll A \gg$ die Menge der aus A mittels der Post'schen Operationen erzeugten Spiele.

Satz 6.1. *Jede der Teilmengen des Raumes $\mathcal{V}$, die gegenüber allen vier Post'schen Operationen abgeschlossen sind, findet man in folgender Liste:*

- $\mathcal{D} = \ll id \gg$
- $\mathcal{P} = \ll et \gg$
- $\mathcal{P}^* = \ll vel \gg$
- $\mathcal{C} = \mathcal{C}^* = \ll maj \gg$
- $\mathcal{F}^\infty = \ll veto \gg$
- $(\mathcal{F}^\infty)^*$
- $\mathcal{F}^k, k \geq 2$
- $(\mathcal{F}^k)^*, k \geq 2$
- $\mathcal{V}$

[12] Betrachtet man das klassische Lösungskonzept Core für kooperative Spiele, so gilt $Core(v) \neq \emptyset \Leftrightarrow v \in \mathcal{F}^\infty$. Die Alternativenmenge ist hier die Menge $\{x \in I\!R^n; \sum\{x_i; i \in N\} = 1\}$.

Es gelten die folgenden Beziehungen:

- $\mathcal{F}^2 \cap (\mathcal{F}^2)^* = \mathcal{C} \supset \mathcal{D}$
- $\mathcal{F}^k \supset \mathcal{F}^{k+1} \supset \mathcal{F}^\infty \supset \mathcal{P} \supset \mathcal{D}$
- $(\mathcal{F}^k)^* \supset (\mathcal{F}^{k+1})^* \supset (\mathcal{F}^\infty)^* \supset P^* \supset \mathcal{D}$

Die Elemente der Klasse $\mathcal{D}$ sind die Diktatorspiele. Die Elemente der Klasse $\mathcal{C}$ sind die Konstantsummenspiele.

Es gilt der Satz:

Satz 6.2. *Die Menge der gewichteten Majoritätsspiele ist abgeschlossen gegenüber der Dualität, der Hinzufügung von Dummies, den Permutationen, der Zusammenfassung, nicht aber gegenüber der Komposition.*

Sei $(\lambda; m_1, ..., m_i, ..., m_n)$ ein Ausgangsspiel. Zu Beweis überlege man sich, daß $(m(N)+1-\lambda; m_1, ..., m_i, ..., m_n)$ das duale Spiel, $(\lambda; m_1, ..., m_i, ..., m_n, 0)$ das um einen Dummy vermehrte Spiel und $(\lambda; m_1, ..., m_i, ..., m_{n-2}, m_{n-1}+ m_n)$ das Spiel darstellt, in dem die letzten beiden Spieler zusammengefaßt werden.

6.3 Ressourcen und Produktionsprozesse

Ein gewichtetes Majoritätsspiel hat folgende Interpretation als Produktionsfunktion für ein kollektives Gut: Im Spiel $(\lambda; m_1, ..., m_i, ..., m_n)$ verfügt ein Spieler i über m_i Einheiten einer Ressource. Um das kollektive Gut zu erstellen, werden λ Einheiten benötigt. Jedes Spiel läßt sich ebenso als Produktionsfunktion darstellen, wenn man nur genug Ressourcen in Betracht zieht:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1; & m_{11}, & \dots & , m_{1n} \\ \lambda_2; & m_{21}, & \dots & , m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_k; & m_{k1}, & \dots & , m_{kn} \end{pmatrix}$$

Um das kollektive Gut zu erstellen, werden von jeder der Ressource mindestens so viele Einheiten benötigt, wie ihr jeweiliges λ_j angibt. Das Spiel et[vel,vel] ist, wie wir schon wissen, kein 1-Ressourcenspiel. Es ist jedoch, entsprechend dargestellt, ein 2-Ressourcenspiel, in dem etwa die ersten beiden Spieler jeweils über eine Einheit der ersten Ressource verfügen, und die beiden letzten Spieler jeweils über eine Einheit der zweiten Ressource. Produziert werden kann nur, falls von jeder Ressource eine Einheit eingebracht wird.

Bemerkung. Anders als bei der Komposition wird in der Ressourcendarstellung die Spielermenge nicht zerlegt.

7 Aggregation und Repräsentation

7.1 Zwei Arten von Aggregation

Mit den obigen Aggregationsregeln haben wir individuelle Bewertungen von Aussagen zusammengefaßt in eine Bewertung. Man kann auch daran denken, daß sich diese Aussagen auf Eigenschaften eines oder mehrerer Objekte beziehen. Ein solches Objekt kann auch das Individuum selbst sein. In einem solchen Falle ist das Individuum selbst Träger einer Eigenschaft (Bewertung 1) oder auch nicht (Bewertung 0). Paare von Objekten, Tripel von Objekten, etc. können selbst zum Objekt gemacht werden. Damit sind insbesondere Präferenzurteile, also zum Beispiel "Alternative A ist besser als Alternative B" mögliche Aussagen, die von den Individuen bewertet werden und für die die Aggregationsregel eine Gesamturteil ausweisen soll (wir werden uns später noch mit diesem Spezialfall beschäftigen).

Es gibt nun zwei Arten von Aggregation. Die eine faßt individuelle Daten zu einem Datum der gleichen Art zusammen, die andere repräsentiert die individuelle Datenvielfalt.

Die erstere, mit der wir uns bisher befaßt haben, bemüht sich um Zusammenfassung individueller Eigenschaften oder Urteile in eine Eigenschaft bzw. ein Urteil, das wie die Eigenschaft bzw. ein Urteil eines Individuums aussieht. Bei der Betrachtung einer einzelnen Eigenschaft bzw. eines einzelnen Urteils mag das noch der Fall sein. Wie wir gesehen haben, führt die Betrachtung einer Mehrzahl von Eigenschaften aber zu Schwierigkeiten. Wenn wir beispielsweise beim individuellen Urteil logische Konsistenz voraussetzen, so kann das Gesamturteil ab einer gewissen Reichhaltigkeit zu betrachtender (möglicher) Aussagen nur ebenfalls logisch konsistent sein, falls ein einzelner Entscheider in der Gruppe als "Diktator" ausgezeichnet wird. Ein solcher würde nie die Meinungen seiner Untergebenen beachten. Aber welcher Betriebsleiter würde durchgängig die Meinungen seiner Mitabeiter mißachten?

Wir können die Interaktion einer Gruppe mit ihrer Umwelt als Prozeß sehen, bei dem die Umwelt der Gruppe Sätze vorlegt und die Mitglieder diese Sätze bewerten; man kann nun versuchen, die "Systemantwort" dadurch zu verstehen, daß man annimmt, daß nach einer für die Gruppe typischen Regel die Urteile aggregiert werden (eventuell nur von denjenigen, die etwas dazu zu sagen haben) und der "Systemantwort" das aggregierte Urteil der Gruppe zugrunde liegt. Ist der von der Umwelt vorgelegte Aussagenraum reichhaltig genug, so gibt es aufgrund der obigen Überlegungen Gründe, an das Verhalten von Aggregaten andere Anforderungen zu stellen als an das Verhalten von Individuen. Das Verhalten von Aggregaten weicht vom Verhalten von Individuen typischerweise ab; damit kein falscher Eindruck entsteht: das ist nicht immer ein Nachteil - aber davon später.

Die zweite Art von Aggregation behandelt das Aggregat nicht ebenso wie ein Individuum. Statt dessen wird eine umfassende Charakterisierung des Ganzen bezüglich der in Rede stehenden Eigenschaften angestrebt. Eine Aggregation dieser Art mag auf Abzählen und Messen beruhen. Man kann dann das Vorkommen einer Eigenschaft (bzw. jeder Ausprägung einer Eigenschaft, oder auch von Kombinationen bestimmter Eigenschaften) in der Gruppe durch die Angabe relativer Häufigkeiten oder Gewichte wiedergeben. Individuelle Bewertungen oder Eigenschaften werden nur "soweit als möglich" aggregiert. Es ist eher der statistische Blick oder der Blick auf eine Ordnung in der Vielfalt.

Ginge es um Eigenschaften, die in Zahlen gemessen werden, etwa die Körpergröße der Individuen, so wäre es nach der Aggregation 1. Art möglich, die Gruppe durch das arithmetische Mittel oder den Median zu charakterisieren. Und die Existenz eines Individuums dieser Körpergröße wäre zumindest möglich. Werden allerdings mehrere Eigenschaften gleichzeitig betrachtet, die in gewisser Weise miteinander korreliert sind (nicht frei kombinierbar sind), so ist es leicht möglich, daß es unmöglich wird, daß ein Individuum gleichzeitig alle Eigenschaftsmittel (bzw. Mediane) aufweist. Diese Probleme "metrischer Aggregation" treten analog zu den Problemen logischer Aggregation auf. Eine Aggregation 2. Art, die weitere Merkmale der Verteilung mit einbezieht, kann auch hier hilfreich sein.

7.2 Repräsentant, Repräsentanzen und Repräsentation

Gruppen bedienen sich unterschiedlicher Methoden, um mit dem Aggregationproblem umzugehen; als Beispiele seien hier nur vier genannt:

- Verzicht auf Entscheid bei zur Abstimmung noch nicht ”reifen” Vorlagen
- Einführung einer Hierarchie
- Mehrfaches Gegenzeichnen
- Zuweisung besonderer Zuständigkeiten

Die regelmäßige Anwendung solcher Methoden macht aus der Gruppe eine Organisation.

Wenn ein Individuum Repräsentant einer Gruppe ist, so kann es innerhalb eines gewissen Rahmens für die Gruppe handeln. In unserem Kontext wollen wir unter einem Repräsentanten der Gruppe für eine Klasse von Fragen (gemeint sind Aussagen, also solche, die sich mit ja oder nein beantworten lassen) jedoch ein Individuum verstehen, das über alle diese Fragen genauso urteilt, wie die Gruppe insgesamt unter der für diese Fragen anzuwendenden Entscheidungsregel urteilen würde.

Eine Koalition S, in der alle Mitglieder in allen Fragen dieselbe Bewertung vornehmen, heiße homogen. Sind in der Gruppe N alle möglichen Bewertungen der Aussagen des Geltungsbereiches A der Regel v vertreten, so ergibt die Sortierung der Individuen $i \in N$ nach Meinungsprofilen nur Individuen: d.h. nur die einelementigen Koalitionen sind homogen. In einem solchen Falle könnte nur ein Diktator Repräsentant sein. Sind jedoch nicht alle Meinungsprofile in der Gruppe vorhanden, so gilt das nicht mehr. Möglicherweise sind sogar größere Koalitionen homogen.

Wenn sich eine Gruppe (in ihrer Bewertung, ihrem Handeln) nicht durch ein Individuum repräsentieren läßt, warum nicht durch eine Auswahl von mehreren Individuen? Politisch-praktisch wird dieser Weg bei Wahlen zu Gremien genutzt, organisationspraktisch repräsentieren Abteilungsleiter ihre Abteilungen und Abgeordnete ihre Wahlkreise.

Aus dieser Sicht kann man fragen, unter welchen Umständen man ein Gremium als repräsentativ für das Ganze erachtet. Ab einem gewissen Organisiertheitsgrad sind Gruppen mit unterschiedlichen Instanzen ausgestattet, die – teilweise konkurrierend – in Anspruch nehmen können, das Ganze zu repräsentieren. Solche ”Repräsentanzen” (Organe) können ihrerseits als eine Gruppe mit Aggregationsregel oder Gremium aufgefaßt werden. Nennen wir ihre Mitglieder Repräsentanten, so bleibt zunächst unbestimmt, wen oder was sie repräsentieren.

7.3 Politische Repräsentation

Die Politikwissenschaft hat eine eigene und kontroverse Literatur zum Thema der Repräsentation. Besonders dort, wo es um Normatives und Bewertung von politischen Systemen geht, sind Kontroversen unvermeidbar. In der deutschen Nachkriegsdiskussion (vgl.Rausch 1968) wurde die Ausrichtung der Verfassung an einem repräsentativen Parlament oft als einer plebiszitären Ausrichtung entgegengesetzt verstanden. Es war auch strittig, welche Rolle den Parteien bei der Repräsentation und generell im Staat zukommen sollte.

Anders als in jenen Diskursen geht es uns hier vor allem um die Repräsentativität von politische Gremien und Wahlverfahren. In der Theorie gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Ansätze. Der eine Ansatz spricht davon, daß ein Abgeordneter repräsentiert das Ganze repräsentieren soll, dem anderen Ansatz gemäß repräsentiert ein Abgeordneter eine Partikularinteresse. In letzterem Falle ist gibt es dann wieder unterschiedliche Ausrichtungen. Der Abgeordnete könnte zum Beispiel seine Wähler, ein Wahlkreis oder einfach eine Partei repräsentieren. Mit dieser Idee der Repräsentation ist meist die Vorstellung verbunden, daß der Abgeordnete die Repräsentierten vertritt, bevollmächtigt ist, anstatt ihrer zu handeln.

Wenn man das Volk als den Souverän ansieht, sind letztlich alle politischen Vertretungsorgane Repräsentanzen des Volkes, egal ob einzelne wie ein Präsident, eine Königin oder Gremien wie Reichsstände, Ratsversammlungen oder Parlamente. Die Repräsentanten verfügen über eine gewisse Macht, jedoch nie nur für sich selbst. Zu regeln ist dann das Ausmaß der Machtbefugnis die Art der Kontrolle. Die Antworten fallen sehr unterschiedlich aus und sind davon abhängig, was als Ziel der Repräsentation angesehen wird. Bilden die Repräsentanten eher ein Volk im kleinen oder eher eine gewählte Aristokratie. Wird die Hauptaufgabe des Vertretungsorgans eher in der Bildung einer starken Regierung gesehen oder geht es um die Kontrolle einer Regierung im Interesse der Vertretenen? Condorcet hat sich mit solchen Fragen auseinander gesetzt und war an die praktische Ausgestaltung eines Systems demokratisch gewählter Repräsentanzen beteiligt. Eine formale Theorie zum Zusammenspiel mehrerer Instanzen findet man bei ihm jedoch nicht. Sie steckt auch heute noch in den Kinderschuhen.

Welche Vorkehrungen sind zu treffen, damit Repräsentanten die Repräsentierten auch vertreten? Aus Condorcets Zeit stammt dazu die Forderung von wiederholten, freien, geheimen und gleichen Wahlen (Frauenwahlrecht, Sklavenbefreiung) und die Forderung der Gewaltenteilung. Wie im 1. Abschnitt gezeigt war Condorcet selbst der Auffassung, daß dieses bei weitem nicht reicht. Er selbst mußte erleben, wie nach einem demokratischen Aufbruch Revolutionsführer herausbildeten, um das Volk erneut zu versklaven. Ähnliche Beispiele der Wendung zum Terror gibt es bekanntlich einige, nach wie vor.

Noch 1785 war Condorcet eher ein demokratischer Monarchist als ein Republikaner. Vorrang hatte für ihn das Auffinden der "Wahrheit" und des gemeinsamen Interesses. Dazu sollten alle Ressourcen entwickelt und genutzt werden. Bildung und freie, gleiche Wahl dienen dieser Aufgabe. Als entsprechende "Geburtshilfe" empfand er wohl auch sein Mitwirken an der Revolution. Im Juni 1793 erschien Condorcets anonym vorgetragene Kritik des gerade erschienenen Verfassungsentwurfs unter dem Titel "Aux citoyens français sur la nouvelle constitution" (Ouvres, tome 12). Im Juli erfolgte daraufhin Anklage und Verfolgung. Er hatte es gewagt, die Einschränkung der Menschenrechte und Bürgerrechte zu kritisieren und verurteilte den Mißbrauch von Verfahrensregeln (... on parait craindre de donner au peuple trop de droits à exercer"). Statt dessen werden wage und inkonsistente Versprechungen gemacht. Es war für ihn auch nicht akzeptabel, daß an die Macht Gekommene das Volk über Dinge beschließen ließen, bei denen es über keine Kenntnisse verfügte und so von Intriganten lenkbar wurde. Die unparteiische Prüfung, Beratung und Abwägung war unmöglich geworden. Die Pressefreiheit und die Rechte der Abgeordneten wurden ausgehöhlt. Condorcet warnte vor dem Versuch einer "association particulière" sich die Macht zu sichern. Für diese Mächtigen besonders unerträglich war folgender Abschnitt:

> N'oubliez pas ... et jugez ensuite si des hommes qui auraient cherché à préparer le piédestal d'un nouveau roi n'auraient pas voulu aussi un conseil exécutif ... qu'il fût plus facile de remplacer par un monarque, sans déranger aucun des autres ressorts de la machine politique. (S. 674)

Er beendet seinen Aufruf mit folgenden Worten:

> Français, celui qui vous adresse ces réflexions vous devait la vérité, et il vous l'a dite. Il ne s'est point nommé, parce que la presse, comme la parole, a cessé d'être libre, et que votre intérêt exige de cacher à vos ennemis le nom de vos défenseurs. (S. 675)

Auf die hier angedeuteten Verfassungsfragen hat es sehr unterschiedliche Antworten gegeben. Ein Unterschied, der hauptsächlich zwischen Kontinentaleuropa und dem angelsächsischen Bereich besteht, bezieht sich auf die vorrangige Art der Repräsentation in Parlamenten. Die Auffassung von Repräsentation orientiert sich in Kontinentaleuropa wohl mehr an dem Bemühen ein Beratungs- und Entscheidungsgremium zu bilden, das so agiert, wie es die Bürgerschaft als Ganze tun würde[13]. Da bei der Meinungsbildung und im Wahlsystem die Parteien eine priviligierte Rolle spielen, ist verständlich, daß das Volk mit seine Meinungen, Präferenzen und Bindungen über einen Proporz der Parteien repräsentiert wirdDie Repräsentation über Parteien fand schon immer seine Kritiker. Leibholz ist ein prominenter davon, der unermüdlich vor den Gefahren der sich ausweitenden Macht der Parteien warnte, die sich auch gegen "ihre eigenen" Abgeordneten und "ihre" Wähler richten kann.

In unserer Betrachtung werden wir jedoch von diesen Problemen, die das gesamte politische System betreffen und wohl auch die politische Kultur, abstrahieren müssen, um auf den Kern der Repräsentativität eines Gremiums und auf seine mögliche seiner Aggregationsleistung zurückzukommen.

7.4 Repräsentative Gremien, Ausschüsse und Minimalrepräsentationen

Bestimmt man ein Gremium, um die Meinungen und Interessen einer Gruppe wiederzugeben, so braucht es ein Kriterium, um die Vielfalt darstellbar zu machen. Unterstellt man, daß Meinungen und Interessen sich im wesentlichen nach Wahlkreisen bzw. nach Parteien sortieren lassen, so unterstellt man zumindest die Vorrangigkeit dieses Unterscheidungskriteriums. Sowohl Wahlkreise als auch Parteien bewirken eine Partition der Gruppe. In dieser groben Vereinfachung erscheinen dann die nach diesem Kriterium bestimmten Mitglieder eines Gremiums der Gruppe als Repräsentanten der jeweiligen Meinungs- und Interessenklasse. Das Gremium selbst, in unserer Abstraktion als einfaches Spiel dargestellt, also Mitglieder und Entscheidungsregel, könnte dann die gesamte Gruppe repräsentieren, wenn zumindest für zentrale Aussagen gilt, daß die möglichen Mehrheiten der gesamten Gruppe genau den Gewinnkoalitionen des Gremiums entsprechen. Entsprechend sollte man für Ausschüsse des Gremiums verlangen, daß im Ausschuß dieselben "Mehrheitsverhältnisse" gelten wie im Gremium.

Wir repräsentieren jeweils bezüglich eines Kriteriums. Dieses unterscheide n Typen (Ausprägungen). Man kann auch sagen, wir zerlegen die Gruppe aufgrund einer Äquivalenzrelation $i \sim j$ in n "Meinungstypen" bzw. "Interessenstypen" $G_1, ..., G_n$. Zu jeder Zerlegung $(G_1, ..., G_n), n \in N$ der Mitglieder von (G,g) ist $(N, \tilde{g})$ das Spiel zwischen den Typen, wobei

$$\tilde{g}(S) = g(\sum\{G_i; i \in S\})$$

Dieses Spiel entsteht durch wiederholte Anwendung der Post'schen Operation Zusammenfassung. Damit wissen wir:

Folgerung 7.1. *Wird in einer Gruppe G per gewichtetem Majoritätsspiel aggregiert, so ist auch das Spiel zwischen den in der Gruppe vorhandenen Typen ein Majoritätsspiel.*

Das hat folgende weitere Konsequenz:

Folgerung 7.2. *Zählt bei der Entscheidung in einer Gruppe jede Stimme gleich, so gibt es ein repräsentatives Gremium für diese Gruppe, in dem jede Stimme gleich zählt.*

[13] Zwar ist dies weitgehend ein Fiktion und das Bemühen die Meinung aller zu erfahren, ist häufig nicht frei von Einflußnahmen, doch kann nicht ohne weiteres gegen den öffentlich erklärten oder veröffentlichten Willen eines größeren Teils der Bevölkerung gehandelt werden.

Nach dem vorher Gesagten ist das Spiel (N,v) zwischen den Typen ein gewichtetes Majoritätsspiel, also etwa $(\lambda; m_1, ..., m_i, ..., m_n)$. Um aus diesem Spiel ein repräsentatives Gremium, in dem jede Stimme gleich zählt, herzustellen, setzt man die Gremiengröße auf $m(N) = \sum\{m(i); i \in N\}$ fest, und weist dem Typ i jeweils m_i Gremienmitglieder mit jeweils einer Stimme zu. Das geforderte Mehr λ wird übernommen.

In der Spieltheorie heißt ein Vektor $(\lambda; m_1, ..., m_i, ..., m_n)$, für den $v(S) = 1$ genau, wenn $m(S) \geq \lambda$ gilt, "Repräsentation". Nach dem zuvor Erläuterten ist dieser Begriff auch in der Anwendung auf Gremien in gewisser Weise sinnvoll. Es ist zwar in unserer Interpretation das Spiel (N,v) zwischen den Typen, das repräsentiert, aber da ein Gremium nur dann repräsentativ ist, wenn es aus einer "Repräsentation" des Spieles gewonnen wird bzw. gewonnen werden kann, soll dieser Begriff im folgenden auch verwendet werden.

Es gilt nun, daß ein Spiel entweder keine oder sehr viele Repräsentationen hat. Ist nämlich ν ein natürliche Zahl und sind $(\lambda_1; m_{11}, \ldots, m_{1n})$ und $(\lambda_2; m_{21}, \ldots, m_{2n})$ zwei Repräsentationen von (N,v), so sind $\nu(\lambda_1; m_{11}, \ldots, m_{1n})$ und $(\lambda_1; m_{11}, \ldots, m_{1n}) + (\lambda_2; m_{21}, \ldots, m_{2n})$ ebenfalls Repräsentationen. Beispielsweise repräsentieren (6;5,3,2,1), (3;2,1,1,1), (12;10,6,4,2) und (9;7,4,3,2), sowie (9;7,2,3,4) dasselbe Spiel (das Spiel apex, das kleinste der Apex-Spiele, bei denen der "größte" Spieler mit einem "kleineren" eine minimale Gewinnkoalition bilden kann, und die Koalition aller ohne den "Größten" die einzige weitere Gewinnkoalition ist).

Zumindest gilt: Wird das Gremium durch Wahl bestimmt, so erzeugt ein proportionales Zuteilungsverfahren ein repräsentatives Gremium. Allerdings ist es i.a. nicht möglich (besonders bei fester Hausgröße), die Proportionen exakt zu wahren: es treten "Rundungsprobleme" auf. Die Eigenschaften, die von Theoretikern der Zuteilungsverfahren betrachtet oder eingefordert werden (vgl. etwa Brams & Straffin 1982), umfassen bisher leider nicht die Repräsentativität; der Erhalt der Mehrheitsverhältnisse ist in der bisherigen Literatur leider kein Ziel.

Hat man nur den Erhalt der Mehrheitsverhältnisse im Blick, so würde das folgende Verfahren Repräsentativität garantieren: Aufgrund einer Parteienwahl wird das entsprechende gewichtete Mehrheitsspiel zwischen den Parteien betrachtet. Hierzu wird eine **Minimalrepräsentation** erstellt, also eine Repräsentation mit minimaler Hausgröße (eine solche gibt es immer, allerdings nicht immer nur eine). Nehmen wir an $(\lambda; m_1, ..., m_i, ..., m_n)$ wäre eine solche Repräsentation, so erlaubt ein Gremium der Größe $k \sum_i m_i$, in dem jede Partei i mit km_i Repräsentanten vertreten ist, eine getreue Wiedergabe der Wählerstimmen. Darüber hinaus wurde gezeigt (Rosenmüller & Sudhölter 1994, und Sudhölter 1996 in Verbindung mit Sudhölter & Peleg 1998), daß auch unter dem Aspekt der Verteilungsgerechtigkeit, die Minimalrepräsentation bedeutsam ist.

Nicht immer ist die Minimalrepräsentation eines Spieles leicht zu finden. Betrachtet man die Liste der minimalgewinnenden Koalitionen, so kann jedoch für gewisse Spiele (sie heißen homogene gewichtete Majoritätsspiele) ein einfaches Verfahren zur Konstruktion der Minimalrepräsentation angegeben werden (Ostmann 1987; es gibt für diese Spiele nur genau eine Minimalrepräsentation).

Das Verfahren zur Bestimmung der Minimalrepräsentation sei an einem einfachen Beispiel erklärt. Dazu betrachten wir folgendes Spiel das durch seine Matrix der minimalen Gewinnkoalitionen angegeben wird. Dabei sind bereits die Spieler so nummeriert, daß stärkere[14] Spieler weiter vorne stehen. Die Koalitionen werden lexikographisch angeordnet.

[14] Spieler i ist mindestens so stark wie Spieler j, falls für jede Gewinnkoalition S, in der j Mitglied ist, auch S-{j}+{i} Gewinnkoalition ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Als Stufenspieler bezeichnen wir einen Spieler der nicht durch weniger starke Spieler ersetzbar ist. Es gilt folgende Konstruktionsregel: Dummies erhalten das Stimmgewicht 0
Stufenspieler erhalten 1 mehr als der verfügbare "Rest" weniger starker Spieler
Als Summe bezeichnen wir einen Spieler, der in irgendeiner minimalen Gewinnkoalition durch eine Menge weniger starker Spieler ersetzbar ist. Eine Summe erhält das Stimmgewicht, das sie ersetzt.
In unserem Beispiel errechnen wir nun:
5: 0, 4: 1 (Stufe), 3: 2=1+1 (Stufe), 2: wie 3, 1: 3=2+1 (Summe).
Damit hat das Spiel die Minimalrepräsentation $(5; 3, 2, 2, 1)$

Betrachten wir nun als Beispiel die Wahl im Jahr 2005 für den deutschen Bundestag. Der Wahlkörper etabliert das folgende Spiel zwischen den Parteien:

$$(1 + \frac{45.430.378}{2}; 16.194.665, 13.136.740, 4.648.144, 4.118.194, 3.838.326, 3.494.309)$$

Zu dem zu besetzenden Gremium, dem Bundestag, mit 614 Abgeordneten gehört folgendes Spiel zwischen den Parteien:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{614}{2} & ; & 222 & 180 & 61 & 54 & 51 & 46 \end{pmatrix}$$

Es hat folgende Minimalrepräsentation:

$$\begin{pmatrix} 5 & ; & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Faßt man nach Typen zusammen, so erhalten wir folgende Parteienanzahlen für die Typen und die folgende Matrix der Profile der minimalen Gewinnkoalitionen.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Nun ist dieses Ergebnis etwas geschönt, denn entgegen dem Repräsentativitätsanspruch, ist ein Teil des Wahlkörpers im Parlament nicht vertreten. Berücksichtigt man die "Partei der unberücksichtigten Wähler" (22,3%) - sie ist im folgenden fett gedruckt wiedergegeben - , so ist erhält man:

$$(0,5 + \frac{60.859.701}{2}; 16.194.665, \mathbf{14.429.323}, 13.136.740, 4.648.144, 4.118.194, 3.838.326, 3.494.309)$$

Dazu gehört die Minimalrepräsentation:

$$\begin{pmatrix} 8 & ; & 4 & \mathbf{4} & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Typendarstellung der minimalen Gewinnkoalitionen ist:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Lassen wir nun die Sitze der unberücksichtigten Wähler leer, so erhalten wir die Repräsentation:

$$(8 \quad ; \quad 4 \quad 3 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

Da der großen Partei die Partei der Unberücksichtigten als Koalitionspartner fehlt, ist er nunmehr nur noch gleich stark wie die mittelstarke Partei. Die Minimalrepräsentation ist nun:

$$(5 \quad ; \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

Dieses Spiel verfügt über eine Vetokoalition; der Schnitt aller Gewinnkoalitionen ist die Menge der zwei großen Parteien.

Während die Minimalrepräsentation in der obigen Anwendung dazu benutzt wurde, die Repräsentativität eines durch Wahl besetzten Gremiums zu beurteilen, gibt es eine weitere wichtige Anwendung der Minimalrepräsentation: die Bestimmung von Anrechten auf Sitze in Ausschüsse. Wenn eine Frage nicht im Plenum eines gewählten Gremiums behandelt werden soll, wird üblicherweise ein Ausschuß gebildet, in dem die Fraktionen angemessen vertreten sind. Wie bei den Wahlverfahren ist auch hier die Repräsentativität des Ausschusses kein explizites Kriterium. Das kann man etwa daran erkennen, daß nicht danach gefragt wird, wie groß ein Ausschuß mindestens sein muß, um Repräsentation überhaupt zu ermöglichen.

Die Anwendung der Minimalrepräsentation bei Fragen der Repräsentativität von Gremien wird in der Praxis dadurch erschwert, daß Gremien in der Regel unterschiedliche Tätigkeiten ausüben, die von unterschiedlichen Spielen regiert werden. Selbst beim Entscheiden gibt es oft unterschiedliche Mehr für verschiedene Entscheidungstypen. Für das Recht, Untersuchungen anzustellen, Informationen zu verlangen, etc. mag es geringe Schwellen geben. Solche Multifunktionalitäten haben beispielsweise zur Folge, daß man Parteien, die bezüglich der Hauptentscheidungsregel nur Dummies sind, nicht ohne weiteres aus Ausschüssen ausschließen darf, auch wenn es bei Anwendung der Minimalrepräsentation, so geschehen würde.

LITERATUR

[1] Arago, M. F. & O'Connor-Condorcet, A. (eds.) (1847-1849). Œuvres de Condorcet. 12 volumes. Paris: Firmin Didot.

[2] Arrow, K. J. (1951). Social Choice and Individual Values. New York: Wiley.

[3] Beth, Th., Jungnickel, D. & Lenz, H. (1985). Design Theory. Mannheim: Bibliographisches Institut.

[4] Borda (1784). Mémoire sur les élections au scrutin. Histoire de l'Académie des Sciences pour 1781. Paris.

[5] Brams, Steven J., and Philip D. Straffin, Jr. (1982). The Apportionment Problem (review of Balinski and Young, Fair Representation, Yale University Press, 1982). Science 217, no. 4558 (30 July): 437-438.

[6] Brams, Steven J., Paul H. Edelman, and Peter C. Fishburn (2001). Paradoxes of Fair Division. Journal of Philosophy 98, no. 6 (June): 300-314.

[7] Brams, St. J. & and Kaplan, T. R. (2005). Dividing the Indivisible: Procedures for Allocating Cabinet Ministries to Political Parties in a Parliamentary System. Universität Bielefeld. IMW working paper 340.

[8] Buffon (1777). Essai d'Arithmétique Morale.

[9] Condorcet. Alle Werke bis auf den Esquisse werden nach der Werkausgabe Arago, M. F. & O'Connor-Condorcet, A. (eds.) (1847-1849) zitiert (Œuvres).

[10] Condorcet, A. (1795). Tableau général de la science qui a pour objet l'application du calcul aux sciences politiques et morales. Tome 1.

[11] Condorcet, A. (1785). Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendus à la pluralité des voix. Tome 7.

[12] Condorcet, A. (1789). Essai sur les assemblées provençales. Tome 8. Hier findet man außer den wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen auch das berühmte Beispiel von Pierre, Jacques und Paul (Note 1, pp. 559-578) und weitere Anmerkungen über Probleme mit Abstimmungen in Gremien samt Beispielen (Note 2., pp. 578-604).

[13] Condorcet, A. (1789). Examen sur cette question. Tome 9.

[14] Condorcet, A. (1793). Sur les élections. Tome 12.

[15] Condorcet, A. (1793). Esquisse d'un tableau des progres de l'esprit humain. Neue Auflage bei Editions sociales,. Paris 1971. Deutsch bei Suhrkamp.

[16] Cournot, A. A. (1838). Sur la probabilité des jugements. Journal de Liouville.

[17] Einhauser, R. (1898). Proportionalwahl. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 54, 720-729.

[18] Edgeworth, F. Y. (1881). Mathematical psychics. London: Kegan Paul.

[19] Gibbard, A. (1973). Manipulation of voting schemes: a general result. Econometrica 41, 587-601.

[20] Granger, G.-G. (1956). La Mathématique Sociale du Marquis de Condorcet. Paris: Presses Universitaires de France.

[21] Guilbaud, G. Th. (1952). Les Théories de l'interêt général et le problème logique de l'agrégation. Économies et Sociétés 5, 501-584.

[22] Jablonski, S. T. et al. (1970). Boolesche Funktionen und Pstsche Klassen. Berlin (russisches Original: 1966, Moskau).

[23] Laplace (1812). Essai philosophique sur les probabilités

[24] Moulin, H. (1988). Axioms of cooperative decision making. Cambridge: Cambridge University Press.

[25] McLean, I. & Hewitt, F. (1994). Condorcet: Foundations of Social Choice and Political Theory. Aldershot: Edward Elgar.

[26] Ostmann, A. (1985). Decisions by Players of Comparable Strength. Zeitschrift für Nationalökonomie 45, 267-284.

[27] Ostmann, A. (1987). On the Minimal Representation of Homogeneous Games. International Journal of Game Theory 16, 69-81.

[28] Ostmann, A. (1993). Simple Games: On Order and Symmetry. Note di Matematica 13, 251-67.

[29] Poisson, S.-D. (1837). Recherche sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédés des règles generales du calcul des probabilités. Paris: Bachelier.

[30] Post, E. L. (1941). The two-valued iterative systems of mathematical logic. Annals of Mathematical Studies 5.

[31] Rashed, R. (1974). Condorcet - Mathématique et Société. Paris: Hermann.

[32] Rausch (Hrsg.) (1968). Zur Theorie und Geschichte der Repräsentation und Repräsentativverfassung. Darmstadt: WBG.

[33] Rosenmüller, J., and P. Sudhölter (1994). The nucleolus of homogeneous games with steps, Discrete Applied Mathematics 50, 53 - 76.

[34] Satterthwaite, M.A. (1975). Strategy-proofness and Arrow's conditions. Journal of Economic Theory 10, 198-217.

[35] Sen, A. K. (1968). Collective Choice and Social Welfare. Edinburgh: Oliver & Boyd.

[36] Shapley, L. (1962). Simple Games. An Outline of the Descriptive Theory. Behavioral Science 7, 59-66.

[37] Sudhölter, P. (1996). Star-shapedness of the kernel for homogeneous games. Mathematical Social Sciences 32, 179 - 214.

[38] Sudhölter, P. & Peleg, B. (1998). Nucleoli as maximizers of collective satisfaction functions. Social Choice and Welfare 15, 383-411.

[39] Sudhölter, P. & Peleg, B. (1999). Single-peakedness and coalition-proofness. Review of Economic Design 4, 381-387.

[40] Todhunter, I. (1865). A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace. London: Macmillan.

[41] Wahlster, B. (1979). Condorcet. Esquise d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain. Zur Entstehung des bürgerlichen Fortschrittsbegriffs. Zulassungsarbeit zum Staatsexamen. Universität Tübingen.